Пензенский государственный педагогический университет

имени В.Г.Белинского

О.Г.Никитина

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Учебное пособие

Пенза, 2011

Печатается по решению редакционно-издательского совета Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г.Белинского

УДК 517.55

Никитина О.Г. Функции нескольких переменных. Интегральное исчисление: учебное пособие / О.Г.Никитина.- Пенза, 2011. –84с.

Пособие охватывает следующие разделы программы по математическому анализу: двойные, тройные и криволинейные интегралы. Приведены основные теоретические сведения. Они иллюстрируются разобранными примерами. После каждого параграфа даны теоретические вопросы для студентов, теоретические задания, выполнение которых позволит глубже освоить теоретический материал. Имеется большое количество упражнений и задач для самостоятельного решения. Приведены подробные решения всех типовых задач.

Пособие предназначено для студентов физико-математического факультета.

Научный редактор – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа Пензенского государственного педагогического университета имени В.Г.Белинского **Н.Н.Яремко**

ГЛАВА 1. ДВОЙНОЙ И ТРОЙНОЙ ИНТЕГРАЛЫ

§1. Двойные интегралы.

Двойной интеграл является обобщением понятия определенного интеграла на случай функций двух переменных.

1.1. Определение и условия существования двойного интеграла.

На плоскости *Oxy* рассмотрим некоторую замкнутую ограниченную область $\boldsymbol{D}$. Пусть функция $\boldsymbol{z=f(x,y)}$ задана в области $\boldsymbol{D}$. Дадим определение двойного интеграла.

Разобьём область $\boldsymbol{D}$ произвольным образом на ячейки $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2, \ldots, \boldsymbol{D}_n$ с площадями $\Delta \boldsymbol{S}_1, \Delta \boldsymbol{S}_2, \ldots, \Delta \boldsymbol{S}_n$ и диаметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ соответственно (диаметром λ_k области $\boldsymbol{D_k}$ называется наибольшее из расстояний между любыми двумя точками границы этой области). Наибольший из диаметров $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ обозначим через λ. Его называют диаметром разбиения области $\boldsymbol{D}$ (то есть $\lambda = \max\limits_{k=\overline{1,n}} \{\lambda_k\}$).

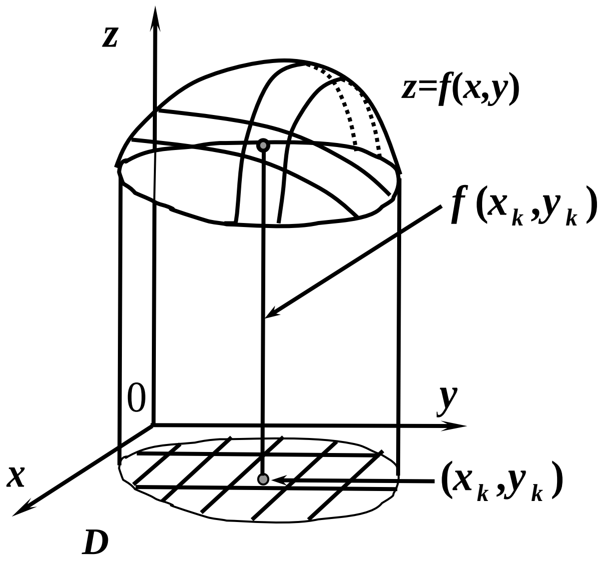


рис. 1

В каждой частичной ячейке $\boldsymbol{D}_k$ возьмём произвольную точку $\boldsymbol{M}_k(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{y}_k)$ и вычислим в ней значение функции $\boldsymbol{f(x_k, y_k)}$. Умножим $\boldsymbol{f(x_k, y_k)}$ на площадь соответствующей ячейки $\Delta \boldsymbol{S_k}$ и просуммируем все такие произведения, т.е. составим сумму $\sigma = \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k$, которая называется ***интегральной суммой*** для функции $\boldsymbol{f(x,y)}$ по области $\boldsymbol{D}$.

Определение. *Если интегральная сумма* σ *при* $\lambda \to 0$ *имеет предел* (*этот предел не зависит ни от способа разбиения области* $\boldsymbol{D}$ *на частичные ячейки, ни от выбора точек* $\boldsymbol{M_k}$), *то он называется* ***двойным интегралом от функции*** $\boldsymbol{f(x,y)}$ ***по области*** $\boldsymbol{D}$ *и обозначается одним из следующих символов* $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ или $\iint\limits_D f(x,y)ds$.

Сама подынтегральная функция $\boldsymbol{f(x,y)}$ при этом называется интегрируемой по области $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{D}$ называется областью интегрирования, x и y – переменными интегрирования, ds (или $dxdy$) – элементом площади.

Таким образом,

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy \overset{def}{=} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k .}$$

Замечание. Число I называется пределом интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$, если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta>0$ такое, что при $\lambda<\delta$ независимо от выбора точек $\boldsymbol{M_k(x_k,y_k)}$ ($k=\overline{1,n}$) выполняется неравенство $|\sigma - I| < \varepsilon$.

Так же как и для случая функции одной переменной **необходимым условием интегрируемости** функции по области **является ограниченность** функции в этой области. Однако это условие не является достаточным (как и для функции одной переменной), то есть существуют ограниченные, но не интегрируемые функции.

Пример. Рассмотрим функцию

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, \textit{если } x \textit{ и } y \textit{ рациональные числа}, \\ 0, \textit{если } x \textit{ или } y \textit{ иррациональное число}, \end{cases}$$

определенную в квадрате $D = \{(x,y) | 0 \le x \le 1; 0 \le y \le 1\}$. Очевидно, что эта функция ограничена в D. Покажем, что она не интегрируема в области D.

Действительно, если при любом разбиении области D на частичные ячейки выбрать точки $\boldsymbol{M_k(x_k,y_k)}$ с рациональными координатами, то получим

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta S_k = S_D = 1,$$

а если взять точки $M_k(x_k, y_k)$ так, чтобы хотя бы одна из координат каждой точки была иррациональным числом, то получим

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot \Delta S_k = 0.$$

Поэтому не существует предела интегральных сумм σ при $\lambda \to 0$. А значит, функция не интегрируема в D.

Таким образом, чтобы быть интегрируемой в некоторой области, функция, помимо ограниченности, должна обладать некоторыми дополнительными свойствами. Аналогично доказательству соответствующей теоремы для определенного интеграла доказывается следующая теорема.

Теорема (достаточное условие существования двойного интеграла). *Если функция* $f(x,y)$ *непрерывна в ограниченной замкнутой области* D*, то она интегрируема в этой области.*

В дальнейшем мы будем иметь дело, в основном, именно с непрерывными функциями. Однако не следует считать, что двойной интеграл существует только для непрерывных функций.

1.2. Геометрический смысл двойного интеграла. Пусть функция $z = f(x,y)$ непрерывна и неотрицательна в области D. Рассмотрим тело T, ограниченное сверху графиком функции $z = f(x,y)$, снизу областью D, лежащей в плоскости Oxy, с боков – цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси Oz. Тело такого вида называется *криволинейным цилиндром* или *цилиндрическим телом*.

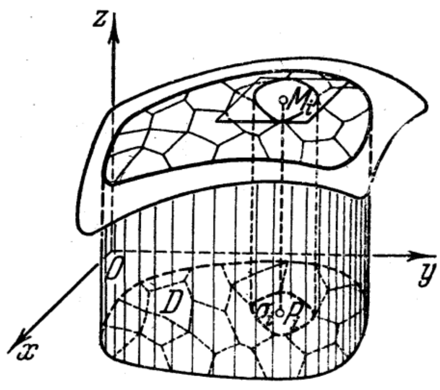


рис.2

Обозначим искомый объем цилиндрического тела через V, Разобьем основание цилиндрического тела - область D - на некоторое число n областей произвольной формы $D_1, D_2, \ldots, D_n$ с площадями $\Delta S_1, \Delta S_2, \ldots, \Delta S_n$ соответственно. Через границу каждой частичной области проведем цилиндрическую поверхность с образующей, параллельной оси Oz. Эти цилиндрические поверхности разрежут поверхность $z = f(x, y)$ на n кусков, соответствующих n частичным областям. Таким образом, цилиндрическое тело окажется разбитым на n частичных цилиндрических тел (см. рис.2). Выберем в каждой частичной области D_k произвольную точку $P_k(x_k, y_k)$ и заменим соответствующее частичное цилиндрическое тело прямым цилиндром с тем же основанием и высотой, равной $f(x_k, y_k)$. В результате получим n-ступенчатое тело, объем которого равен $V_n = f(x_1, y_1)\Delta S_1 + f(x_2, y_2)\Delta S_2 + \ldots + f(x_n, y_n)\Delta S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta S_k$.

Эту сумму можно принять за приближенное значение объема тела T:

$$V \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k .$$

Это приближенное равенство тем точнее, чем мельче разбиение области на части. При переходе к пределу при $\lambda \to 0$ приближенное равенство становится точным:

$$V = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k .$$

Так как функция $f(x, y)$ интегрируема в области D (см. теорему о достаточном условии существования двойного интеграла), то существует предел интегральных сумм при $\lambda \to 0$, который равен двойному интегралу от функции $f(x, y)$ по области D. Следовательно,

$$\boxed{V = \iint_D f(x, y) dxdy.}$$

Таким образом, *геометрический смысл* двойного интеграла состоит в следующем: *двойной интеграл от непрерывной неотрицательной функции равен объему соответствующего цилиндрического тела.*

1.3. Свойства двойного интеграла. Основные свойства двойного интеграла аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла. Сформулируем их.

1°. Если c – некоторое число и функция $f(x,y)$ интегрируема в области *D*, то функция $c \cdot f(x,y)$ также интегрируема в *D* и

$$\iint_D c \cdot f(x,y)dxdy = c \cdot \iint_D f(x,y)dxdy,$$

то есть *постоянный множитель можно выносить за знак интеграла*.

2°. Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в области *D*, то

$$\iint_D (f(x,y) \pm g(x,y))dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy \pm \iint_D g(x,y)dxdy,$$

то есть *двойной интеграл аддитивен относительно подынтегральной функции*.

3°. Если область *D* является объединением областей D_1 и D_2, не имеющих общих внутренних точек, и функция $f(x,y)$ интегрируема в каждой из этих областей, то

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy,$$

то есть *двойной интеграл аддитивен относительно области интегрирования*.

4°. Если в области *D* $f(x,y) \geq 0$, то $\iint_D f(x,y)dxdy \geq 0$.

5°. Если в области *D* $f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$, то $\iint_D f_1(x,y)dxdy \leq \iint_D f_2(x,y)dxdy$.

6°. Если в области *D* справедливо неравенство $m \leq f(x,y) \leq M$, то $m \cdot S_D \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq M \cdot S_D$, где S_D - площадь области *D*.

7°. **Теорема о среднем**. Если функция $f(x,y)$ непрерывна области *D*, то в области *D* найдётся точка $P(\xi,\eta)$ такая, что $\iint_D f(x,y)dxdy = f(\xi,\eta) \cdot S_D$, где S_D- площадь области D.

Значение $f(\xi,\eta)$ называют "средним" значением функции в области *D*.

8°. Оценка абсолютной величины интеграла: если функция $f(x,y)$ интегрируема в *D*, то и функция $|f(x,y)|$ интегрируема в *D*, причем

$$\left|\iint_D f(x,y)dxdy\right| \leq \iint_D |f(x,y)|dxdy.$$

Обратное утверждение неверно, то есть из интегрируемости $|f(x,y)|$ не следует интегрируемость $f(x,y)$.

1.4. Вычисление двойного интеграла в прямоугольных координатах. Область интегрирования D называется *правильной в направлении оси Ox* (*оси Oy*), если любая прямая, параллельная оси Ox (оси Oy) и проходящая через

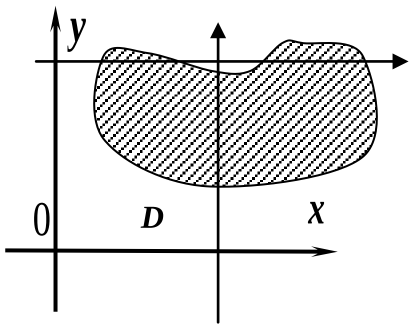


рис. 3

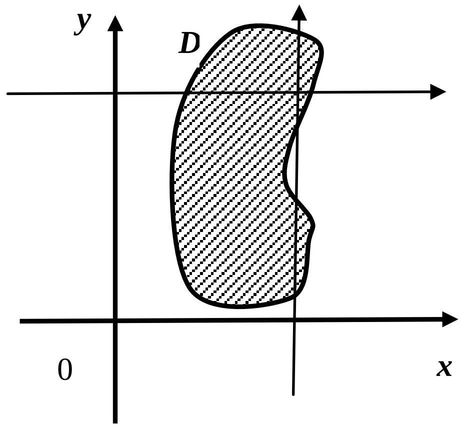


рис. 4

внутреннюю точку области D, пересекает границу области не более, чем в двух точках. Например, на рисунке 3 область является правильной в направлении оси Oy, но не является правильной в направлении оси Ox. На рисунке 4 область является правильной в направлении оси Ox, но не является правильной в направлении оси Oy. А на рисунке 5 область D является правильной и в направлении оси Ox и в направлении оси Oy. Очевидно, что практически любую область можно представить в виде объединения конечного числа правильных областей (см. рис. 6).

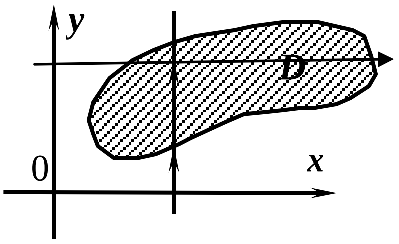


Рис.5

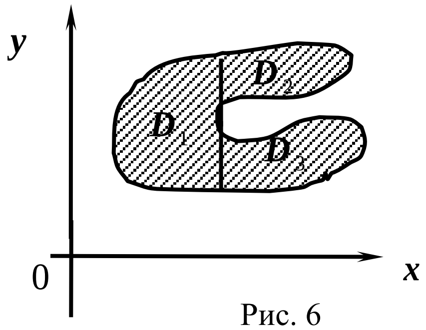


Рис. 6

Пусть функция $f(x,y)$ задана на D и при каждом $x \in [a,b]$ непрерывна по y

на отрезке [$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$] (см. рис 7), тогда функция $F(x)=\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$ определена на отрезке [a,b]. А интеграл от этой функции по отрезку [a,b], то есть $\int\limits_a^b F(x,y)dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$, называется повторным интегралом от функции $f(x,y)$ по области D. Итак, повторный интеграл вычисляется путем последовательного вычисления обычных определенных интегралов сначала по одной, а затем по другой переменной. В записи повторного интеграла принято опускать скобки: $\int\limits_a^b \left(\int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$. Аналогично определяется второй из повторных интегралов: $\int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y)dy \right) dx$ (см. рис.8).

Правило вычисления двойного интеграла.

Вычисление двойного интеграла производится повторным интегрированием. Очередность интегрирования и расстановка пределов интегрирования зависит от вида области интегрирования. Будем предполагать, что функция $f(x,y)$ непрерывна области D. В этом случае и двойной интеграл и повторные интегралы существуют.

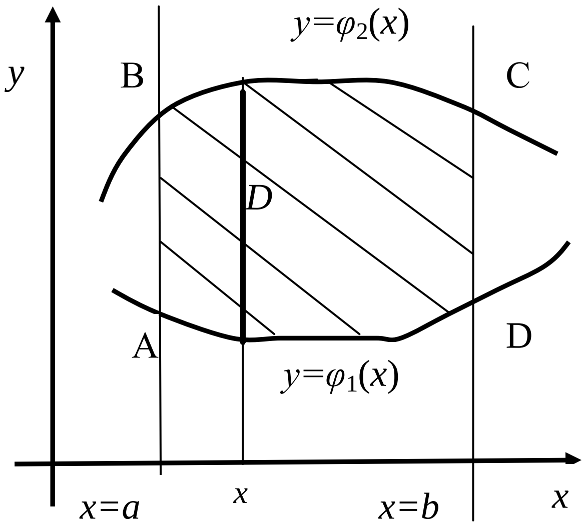


Рис.7

1 случай. Если область интегрирования D является правильной в направлении оси Oy (рис. 7), то она ограничивается слева и справа вертикальными прямыми $x=a$ и $x=b$, а снизу и сверху – непрерывными кривыми $y=\varphi_1(x)$ и $y=\varphi_2(x)$ $(\varphi_2(x)\ge\varphi_1(x))$, каждая из которых пересекается вертикальной прямой только в одной точке (в частности, отрезки AB и CD могут вырождаться в точки).

Для такой области двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_b^a dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy}, \qquad (1)$$

то есть внутреннее интегрирование осуществляется по переменной *y*, внешнее – по переменной *x*, а пределы интегрирования внутреннего интеграла являются (вообще говоря) функциями от *x*.

2 случай. Если область интегрирования *D* является правильной в направлении оси *Ox* (рис. 8), то она ограничена снизу и сверху горизонтальными прямыми $y = c$ и $y = d$, а слева и справа – непрерывными кривыми $x = \psi_1(y)$ и $x = \psi_2(y)$, $(\psi_1(y) \le \psi_2(y))$, каждая из которых пересекается горизонтальной прямой только в одной точке. В этом случае двойной интеграл вычисляется по формуле

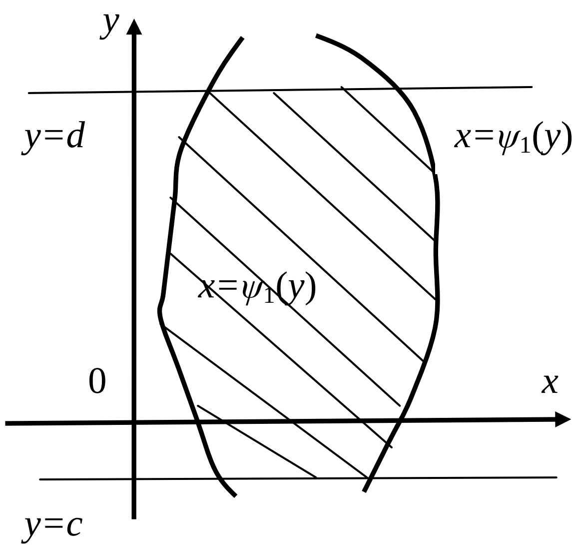


Рис.8

$$\boxed{\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx}, \qquad (2)$$

то есть внутреннее интегрирование осуществляется по переменной *x*, внешнее – по переменной *y*, а пределы интегрирования внутреннего интеграла являются (вообще говоря) функциями от *y*.

3 случай. Область интегрирования *D* является правильной и в направлении оси *Ox* и в направлении оси *Oy* (см рис. 9). В этом случае можно применять любую из формул (1) или (2):

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx.$$

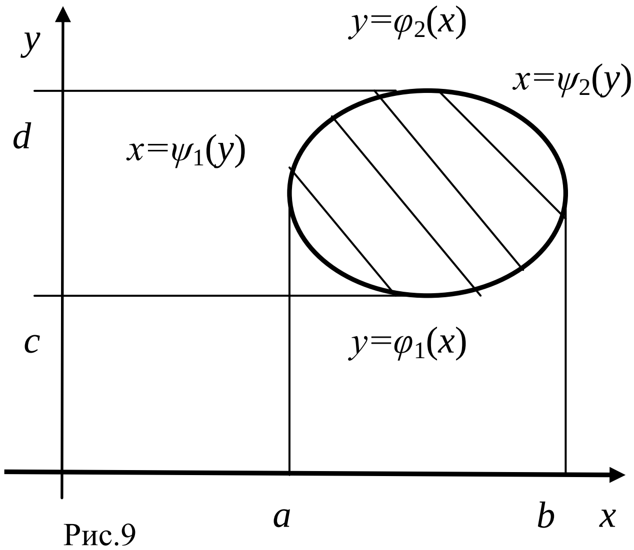


Рис.9

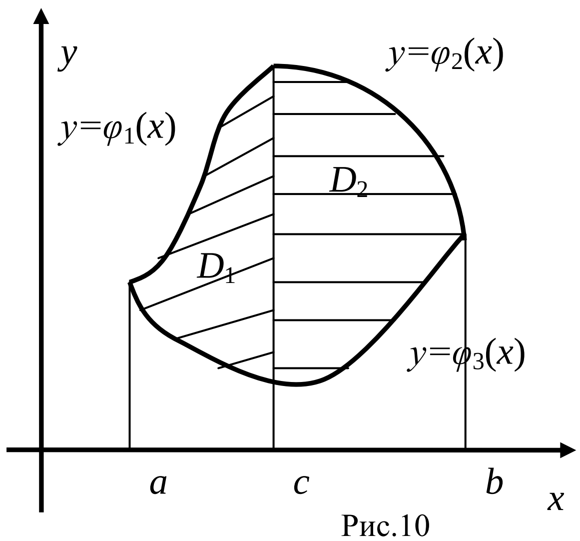


Рис.10

4 случай. Граница области интегрирования состоит из трех и более дуг. Такая область вертикальными или горизонтальными прямыми разбивается на части, подходящие под случаи 1 или 2. Например, на рисунке 10 область D разбита на две области D_1 и D_2, правильные в направлении оси Oy. Двойной интеграл по области D в этом случае вычисляется как сумма интегралов по областям D_1 и D_2:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy = \int_a^c dx \int_{\varphi_3(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)dy + \int_c^b dx \int_{\varphi_3(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy.$$

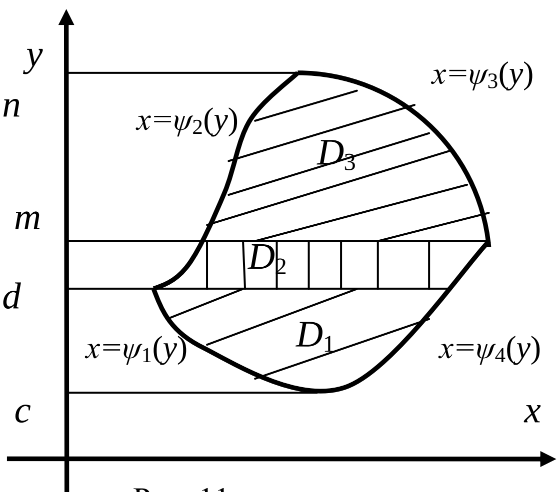


Рис. 11.

Ту же самую область D можно разбить и на области, правильные в направлении оси Ox (см. рис. 11). Тогда интеграл по области D будет равен сумме интегралов по областям D_1, D_2 и D_3:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy +$$

$$+ \iint_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint_{D_3} f(x,y)dxdy =$$

$$=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_4(y)} f(x,y)dx+\int_d^m dy\int_{\psi_2(y)}^{\psi_4(y)} f(x,y)dx+\int_m^n dy\int_{\psi_2(y)}^{\psi_3(y)} f(x,y)dx.$$

Пример 1. Вычислить $\boldsymbol{I}=\iint\limits_{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^2)\boldsymbol{dxdy}$, где область $\boldsymbol{D}$ ограничена прямыми $\boldsymbol{y}=0, \boldsymbol{y}=\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=4$ (рис. 12).

Решение. Вычислим интеграл двумя способами. Прежде всего, сделаем рисунок области интегрирования.

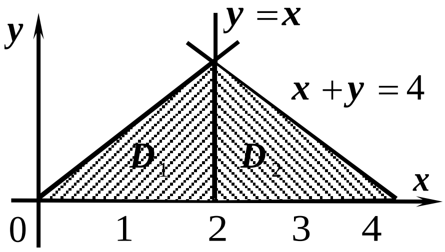


рис. 12

Первый способ. Область интегрирования является правильной в направлении оси *Ox*. Поэтому применим формулу (2). Выполним внутреннее интегрирование по $\boldsymbol{x}$, а внешнее по $\boldsymbol{y}$, получим

$$\boldsymbol{I}=\int_0^2\boldsymbol{dy}\int_{\boldsymbol{y}}^{4-\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^2)\boldsymbol{dx}.$$

Вычислим внутренний интеграл:

$$\boldsymbol{I}_{\text{вн}}=\int_{\boldsymbol{y}}^{4-\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^2)\boldsymbol{dx}=\left(\frac{\boldsymbol{x}^2}{2}+\boldsymbol{x}\boldsymbol{y}^2\right)\Bigg|_{\boldsymbol{y}}^{4-\boldsymbol{y}}=-2\boldsymbol{y}^3+4\boldsymbol{y}^2-4\boldsymbol{y}+8.$$

Подставляя найденное значение в выражение для $\boldsymbol{I}$, получим

$$\iint\limits_{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^2)\boldsymbol{dxdy}=\int_0^2\left[-2\boldsymbol{y}^3+4\boldsymbol{y}^2-4\boldsymbol{y}+8\right]\boldsymbol{dy}=\left(-\frac{\boldsymbol{y}^4}{2}+\frac{4\boldsymbol{y}^3}{3}-2\boldsymbol{y}^2+8\right)\Bigg|_0^2=\frac{32}{3}.$$

Второй способ. Внутреннее интегрирование выполним по переменной $\boldsymbol{y}$, а внешнее - по переменной $\boldsymbol{x}$. Заметим, что при этом область $\boldsymbol{D}$ мы должны разбить на две области $\boldsymbol{D}_1$ и $\boldsymbol{D}_2$ (как указано на рис. 12), следовательно, двойной интеграл выразится в виде суммы таких двух повторных интегралов:

$$I=\int_0^2 dx\int_0^x\left(x+y^2\right)dy+\int_2^4 dx\int_0^{4-x}\left(x+y^2\right)dy=I_1+I_2.$$

$$\boldsymbol{I}_{1\text{внутр}}=\int_0^{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}^2\right)\boldsymbol{dy}=\left(\boldsymbol{xy}+\frac{\boldsymbol{y}^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{x}^2+\frac{\boldsymbol{x}^3}{3}.$$

$$I_1=\int_0^2\left(x^2+\frac{x^3}{3}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{12}\right)\Bigg|_0^2=\frac{8}{3}+\frac{4}{3}=4.$$

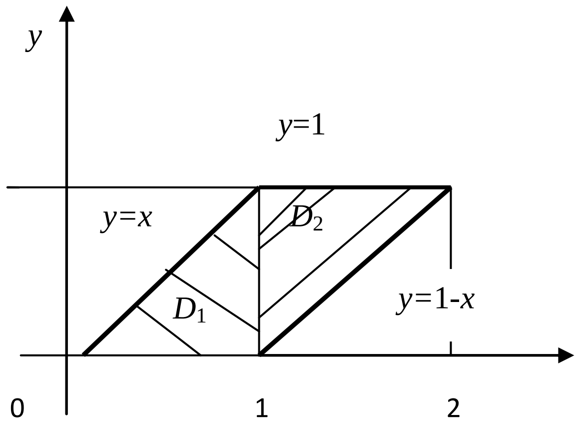
$$I_{2\text{внутр}}=\int_0^{4-x}\left(x+y^2\right)dy=\left(xy+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^{4-x}=\frac{64}{3}-12x+3x^2-\frac{x^3}{3}.$$

$$I_2=\int_2^4\left(\frac{64}{3}-12x+3x^2-\frac{x^3}{3}\right)dx=\frac{20}{3}.$$

Итак, окончательно получим $I=I_1+I_2=4+\dfrac{20}{3}=\dfrac{32}{3}$.

Пример 2. Вычислить $J=\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy$ по области, ограниченной линиями $y=x,\ y=x-1,\ y=1,\ y=0$.

Решение: Разбиваем область интегрирования па части D_1 и D_2 и вычисляем двойные интегралы по каждой из этих областей согласно случаю 1. Находим:



$$J=\iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy=$$

$$=\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dxdy+\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)dxdy.$$

$$\iint\limits_{D_1}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x(x^2+y^2)dy=$$

$$=\int_0^1\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x}dx=\int_0^1\left(x^3+\frac{x^3}{3}\right)dx==\int_0^1\frac{4}{3}x^3dx=\frac{1}{3}.$$

$$\iint\limits_{D_2}(x^2+y^2)ds=\int_1^2 dx\int_{x-1}^1(x^2+y^2)dy=\int_1^2\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{y=x-1}^{1}dx=$$

$$=\int_1^2\left(\left(x^2+\frac{1}{3}\right)-\left(x^2(x-1)+\frac{(x-1)^3}{3}\right)\right)dx=\int_1^2\left(2x^2-x^3-\frac{(x-1)^3}{3}+\frac{1}{3}\right)dx=$$

$$=\left(2\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-1)^4}{4}+\frac{1}{3}x\right)\Bigg|_1^2=\frac{7}{6}.\ \text{Тогда}\ \iint\limits_D(x^2+y^2)dxdy=\frac{1}{3}+\frac{7}{6}=\frac{3}{2}.$$

Примененный метод вычислений для данной области не является рациональным, так как область непосредственно подходит под вид 2. Поэтому интегрирование лучше проводить следующим образом:

$$\iint_D (x^2+y^2)dxdy = \int_0^1 dy \int_y^{y+1} (x^2+y^2)dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right)\Bigg|_{x=y}^{x=y+1} dy =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{(y+1)^3}{3} + y^2(y+1) \right) dy = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{(y+1)^4}{4} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{2}.$$

1.5. Замена переменных в двойном интеграле. Кроме прямоугольных координат x и y для вычисления двойного интеграла могут быть использованы *полярные координаты* r и φ. Прямоугольные и полярные координаты связаны между собой соотношениями: $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$. Преобразование двойного интеграла от прямоугольных координат к полярным осуществляется по формуле

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot drd\varphi .$$

Если область интегрирования D ограничена лучами $\varphi=\alpha, \varphi=\beta$ и кривыми $r=r_1(\varphi), r=r_2(\varphi)$, где $r_1(\varphi), r_2(\varphi)$ - однозначные функции при $\alpha\le\varphi\le\beta$ и $r_1(\varphi)\le r_2(\varphi)$, то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot drd\varphi = \int_\alpha^\beta d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\cdot r\cdot dr .$$

Переход к полярным координатам применяют, если область интегрирования задана в полярных координатах или если это упрощает подынтегральную функцию.

В общем случае преобразование двойного интеграла от прямоугольных координат x и y к криволинейным u, v, связанным друг с другом соотношениями $x=\varphi(u,v)$, $y=\psi(u,v)$, осуществляется по формуле

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D^*} f(\varphi(u,v),\psi(u,v))\cdot |J|\cdot dudv ,$$

где $J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$ (якобиан).

Эта формула справедлива, если функции $\varphi(u,v), \psi(u,v)$ имеют непрерывные частные производные и устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками областей D и D^* и, кроме того, если якобиан сохраняет постоянный знак в области D^*.

Пример 1. Вычислить $J = \iint\limits_G \sqrt{1-x^2-y^2}\,ds$, если область D ограничена окружностью $x^2+y^2=1$.

Решение. В этом примере удобно перейти к полярным координатам, так как это упрощает подынтегральную функцию и сверх того делает более простым пределы интегрирования. После перехода к полярным координатам двойной интеграл запишется в виде

$$J = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi}\cdot dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\cdot dr .$$

Вычисляя внутренний интеграл, получим

$$\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr = -\frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1-r^2}\,d(1-r^2) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-r^2)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

После интегрирования по φ найдем значение двойного интеграла:

$$J = \int_0^{2\pi}\frac{1}{3}d\varphi = \frac{\varphi}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{3}\pi .$$

Пример 2. Вычислить по области, ограниченной эллипсом $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$, двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{1-x^2-\dfrac{y^2}{4}}\,ds$.

Решение. С целью упрощения подынтегральной функции и области интегрирования перейдем к криволинейным координатам u и v связанным с прямоугольными соотношениями: $x = u\cdot\cos v,\ \ y = 2u\cdot\sin v,\ \ u \ge 0,\ \ 0 \le v \le 2\pi$.

В новой системе координат область интегрирования D преобразуется в прямоугольную область: $0 \le u \le 1,\ 0 \le v \le 2\pi$.

Якобиан преобразования координат равен

$$J = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v \\ 2\sin v & -2u\cos v \end{vmatrix} = 2u .$$

Осуществив преобразование координат и интегрируя, придем к следующему результату

$$\iint\limits_D \sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{4}}\,ds = \iint\limits_{D^*} \sqrt{1 - u^2\cos^2 v - u^2\sin^2 v} \cdot 2u \cdot du \cdot dv = \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 2u\sqrt{1-u^2}\,du =$$

$$= \int_0^{2\pi} dv \int_0^1 2u\sqrt{1-u^2}\,\frac{d\left(1-u^2\right)}{-2u} = -\int_0^{2\pi} dv \int_0^1 \sqrt{1-u^2}\,d\left(1-u^2\right) = -\int_0^{2\pi} \left.\frac{\left(1-u^2\right)^{3/2}}{3/2}\right|_{u=0}^{u=1} dv =$$

$$= -\int_0^{2\pi}\left(0 - \frac{2}{3}\right)dv = \left.\frac{2}{3}v\right|_0^{2\pi} = \frac{4}{3}\pi.$$

1.6. Приложения двойных интегралов.

I. ***Геометрические приложения двойного интеграла.***

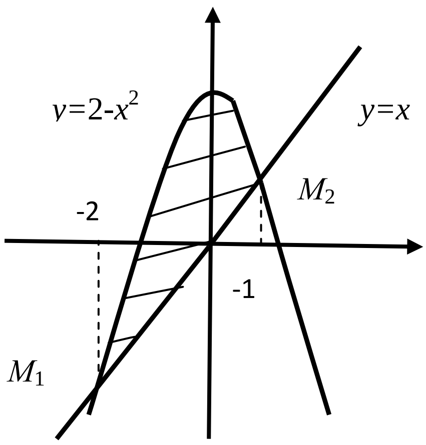
1). ***Вычисление площади плоской фигуры***.

Если составим интегральную сумму для функции $f(x, y) \equiv 1$ в области D по этой области, то эта сумма будет равна площади области D при любом способе разбиения: $S_D = \sum\limits_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta S_k$. Переходя к пределу в правой части равенства, получим:

$$\boxed{S_D = \iint\limits_D dxdy.}$$

Если область D определена, например, неравенствами $a \le x \le b,\ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$, то площадь выразится повторным интегралом $S = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy.$

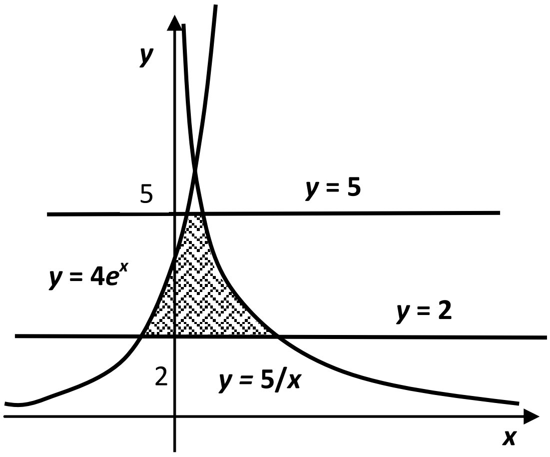
Пример 1. Вычислить площадь области, ограниченной кривыми $y = 2 - x^2,\ y = x.$



Решение. Прежде всего изобразим область. Определим точки пересечения данных кривых: в точке пересечения ординаты равны, т.е. $x = 2 - x^2$, отсюда $x^2 + x - 2 = 0$, $x_1 = -2,\ x_2 = 1$. Мы получили две точки пересечения данных кривых: $M_1(-2;-2),\ M_2(1;1)$. Следовательно, искомая площадь

$$S = \int_{-2}^{1}\left(\int_{x}^{2-x^2} dy\right)dx = \int_{-2}^{1}(2 - x^2 - x)dx = \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

Пример 2. Найти площадь фигуры D, ограниченной линиями $y = \dfrac{5}{x},\ y = 4e^x,\ y = 2,\ y = 5.$



Решение. Эту площадь удобно вычислять, считая y внешней переменной. Тогда границы области задаются уравнениями $x = \dfrac{5}{y},\ x = \ln\dfrac{y}{4}$,

и $S = \displaystyle\int_{2}^{5} dy \int_{\ln\frac{y}{4}}^{\frac{5}{y}} dx = \int_{2}^{5} x\Big|_{\ln\frac{y}{4}}^{\frac{5}{y}} dy =$

$= \displaystyle\int_{2}^{5}\left(\frac{5}{y} - \ln\frac{y}{4}\right)dy = 5\ln y\Big|_{2}^{5} - I_2$, где $I_2 = \displaystyle\int_{2}^{5}\ln\frac{y}{4}dy$ вычисляется с помощью интегрирования по частям:

$$u = \ln\frac{y}{4},\quad du = \frac{1}{y}dy,\quad dv = dy,\quad v = y,$$

$$I_2 = y\ln\frac{y}{4}\Big|_{2}^{5} - \int_{2}^{5} dy = 5\ln\frac{5}{4} - 2\ln\frac{1}{2} - 3 = 5\ln 5 - 8\ln 2 - 3.$$

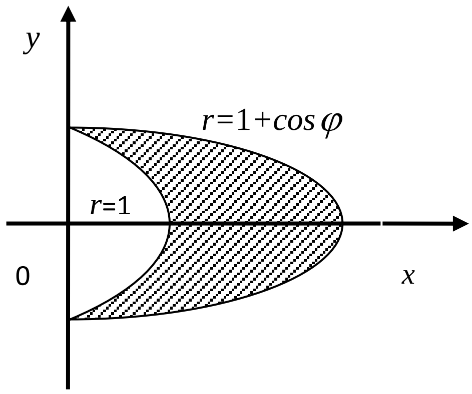
Следовательно, $S = 5\ln 5 - 5\ln 2 - 5\ln 5 + 8\ln 2 + 3 = 5\ln 2 + 3.$

Если область D задана в полярных координатах неравенствами

$\alpha \le \varphi \le \beta,\ r_1(\varphi) \le r \le r_2(\varphi)$, то площадь выразится повторным интегралом

$$\boxed{S = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr.}$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями r=1 и r=1+$cos\varphi$ и лежащей в правой полуплоскости.



Решение. Границы области интегрирования заданы кривыми в полярных координатах, поэтому двойной интеграл также считаем в полярных координатах:

$$\iint_D ds = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_{1}^{1+\cos\varphi} r dr = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{r^2}{2}\right)\Bigg|_{r=1}^{r=1+\cos\varphi} d\varphi =$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{(1+\cos\varphi)^2}{2} - \frac{1}{2}\right) d\varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{2}\cos^2\varphi + \cos\varphi\right) d\varphi =$$

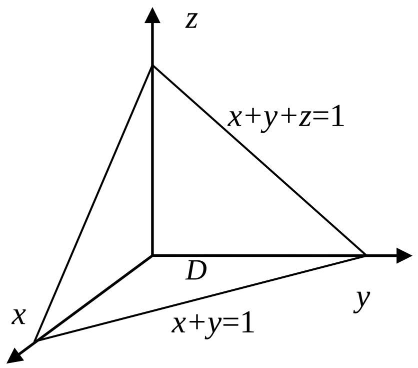
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos 2\varphi + \cos\varphi\right) d\varphi = \left(\frac{1}{4}\varphi + \frac{1}{8}\sin 2\varphi + \sin\varphi\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2 + \frac{\pi}{4}.$$

2). Вычисление объема тела. Объем V тела, ограниченного сверху поверхностью $z = f(x,y)$, где $f(x,y)$ - неотрицательная функция, плоскостью $z = 0$ и цилиндрической поверхностью, направляющей для которой служит граница области D, а образующие параллельны оси Oz, равен двойному интегралу от функции $f(x,y)$ по области D (см. п. 2):

$$V = \iint_D f(x,y) dxdy.$$

Пример 1. Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями x=0, y=0, x+y+z=1, z=0.

Решение. $V = \iint_D (1-x-y) dydx,\ D$ - треугольная область в плоскости Oxy, ограниченная прямыми x=0, y=0, x+y=1. Тогда объем тела будет равен:

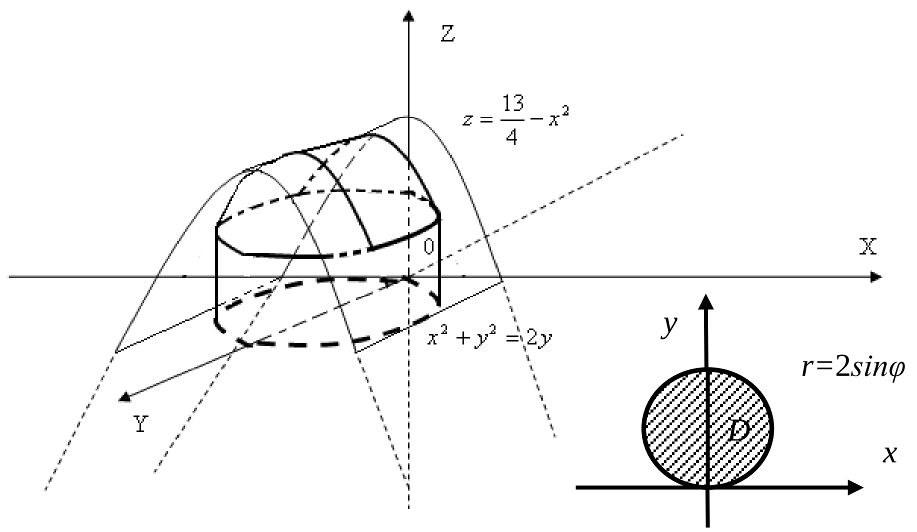


$$V=\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)dydx=\int_0^1\left[(1-x)y-\frac{y^2}{2}\right]_0^{1-x}dx=$$

$$=\int_0^1\frac{1}{2}(1-x^2)dx=\frac{1}{6}.$$

Пример 2. Найти объем тела заданного, ограничивающими его поверхностями $x^2+y^2=2y,\quad z=\frac{13}{4}-x^2,\quad z=0$.

Решение. Сделаем чертеж. $V=\iint\limits_D\left(\frac{13}{4}-x^2\right)dydx$. Так как областью



интегрирования является круг, то удобнее для вычисления интеграла перейти к полярным координатам: $x=r\cdot\cos\varphi,\quad y=r\cdot\sin\varphi$, тогда граница области D будет задаваться уравнением $r=2\sin\varphi$. Поэтому

$$V=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\sin\varphi}(\frac{13}{4}-r^2\cos^2\varphi)rdr=\int_0^{\pi}d\varphi\int_0^{2\sin\varphi}(\frac{13}{4}r-r^3\cos^2\varphi)dr=$$

$$=\int_0^{\pi}(\frac{13}{4}\cdot\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\cos^2\varphi)\Big|_0^{2\sin\varphi}d\varphi=\int_0^{\pi}(\frac{13\cdot 2^2\sin^2\varphi}{8}-\frac{2^4\sin^4\varphi\cos^2\varphi}{4})d\varphi=$$

$$=\int_0^{\pi}(\frac{13}{2}\sin^2\varphi-4\sin^4\varphi(1-\sin^2\varphi))d\varphi=\int_0^{\pi}(\frac{13}{2}\sin^2\varphi-4\sin^4\varphi+4\sin^6\varphi)d\varphi.$$

Разобьем полученный интеграл на три, и вычислим каждый из них отдельно. При этом воспользуемся формулами понижения степени.

$$\int_0^{\pi}\frac{13}{2}\sin^2\varphi d\varphi=\int_0^{\pi}\frac{13}{2}\cdot\frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{13}{4}\int_0^{\pi}(1-\cos 2\varphi)d\varphi=\frac{13}{4}(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi)\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{13}{4}\pi-0=\frac{13}{4}\pi.$$

$$\int_0^{\pi}4\sin^4\varphi d\varphi=\int_0^{\pi}4\cdot\frac{1}{8}(\cos 4\varphi-4\cos 2\varphi+\frac{6}{2})d\varphi=\frac{1}{2}(\frac{1}{4}\sin 4\varphi-4\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\frac{6}{2}\varphi)\Big|_0^{\pi}=$$

$$=\frac{1}{2}(0-0+3\pi)=\frac{3}{2}\pi.$$

$$\int_0^{\pi}4\sin^6\varphi d\varphi=\int_0^{\pi}4\cdot\frac{1}{32}(-\cos 6\varphi+6\cos 4\varphi-15\cos 2\varphi+\frac{20}{2})d\varphi=$$

$$=\frac{1}{8}(-\frac{1}{6}\sin 6\varphi+6\cdot\frac{1}{4}\sin 4\varphi-15\cdot\frac{1}{2}\sin 2\varphi+\frac{20}{2}\varphi)\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{8}(0+0-0+\frac{20}{2}\pi)=\frac{5}{4}\pi.$$

Таким образом, получим $V=\frac{13}{4}\pi-\frac{3}{4}\pi+\frac{5}{4}\pi=\frac{15}{4}\pi.$.

Замечание. Если тело, объем которого ищется, ограничено сверху поверхностью $z=\Phi_2(x,y), \Phi_2(x,y)\geq 0,$ а снизу—поверхностью $z=\Phi_1(x,y),$ $\Phi_1(x,y)\geq 0$, причем проекцией обеих поверхностей на плоскость Oxy является область D, то объем V этого тела равен разности объемов двух цилиндрических тел; первое из этих цилиндрических тел имеет нижним основанием область D, а верхним - поверхность $z=\Phi_2(x,y);$ второе тело имеет нижним основанием также область D, а верхним - поверхность $z=\Phi_1(x,y)$.

Поэтому объём V равен разности двух двойных интегралов:

$V=\iint\limits_D\Phi_2(x,y)dS-\iint\limits_D\Phi_1(x,y)dS$ или

$$V=\iint\limits_D\big(\Phi_2(x,y)-\Phi_1(x,y)\big)dS.$$

Легко, далее, доказать, что эта формула верна не только в том случае, когда $\Phi_1(x,y)$ и $\Phi_2(x,y)$ неотрицательны, но и тогда, когда $\Phi_1(x,y)$ и $\Phi_2(x,y)$ - любые непрерывные функции, удовлетворяющие соотношению $\Phi_2(x,y) \geq \Phi_1(x,y)$.

3). *Вычисление площади поверхности с помощью двойного интеграла*.

Пусть требуется вычислить площадь поверхности заданной уравнением $z = f(x,y)$, где функция $f(x,y)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные. Обозначим проекцию данной поверхности на плоскость *Oxy* через *D*. Тогда площадь поверхности вычисляется по формуле:

$$\boxed{S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dxdy} \quad (z = f(x,y)) \tag{1}$$

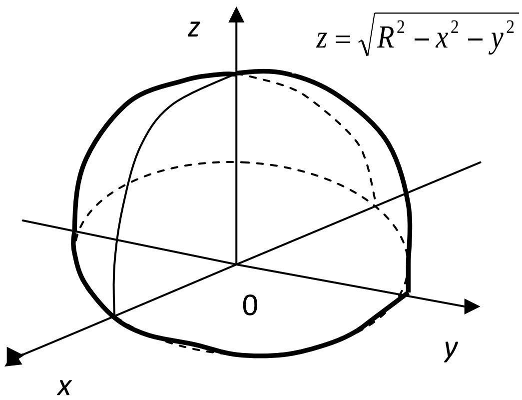
Если уравнение поверхности дано в виде $x = f(y,z)$ или в виде $y = f(x,z)$, то соответствующие формулы для вычисления поверхности имеют вид:

$$S = \iint\limits_{D'} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2}\, dydz \quad (x = f(y,z)), \tag{1'}$$

$$S = \iint\limits_{D''} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2}\, dxdz \quad (y = f(x,z)), \tag{3''}$$

где D' и D'' - области на плоскостях *Oyz* и *Oxz* соответственно, в которые проектируется данная поверхность.

Пример 1. Вычислить поверхность сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.



Решение. Вычислим поверхность верхней половины сферы $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. В этом случае

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Следовательно, подынтегральная функция

примет вид:

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2-y^2}}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}.$$

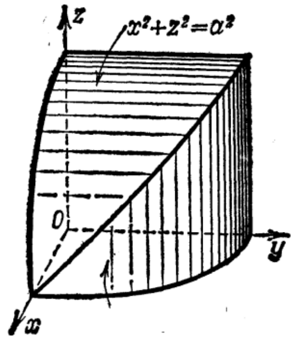
Область интегрирования определяется условием $x^2+y^2\le R^2$. Таким образом, на основании формулы (1) будем иметь:

$$\frac{1}{2}S=\int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}dy\right)dx.$$

Для вычисления полученного двойного интеграла перейдём к полярным координатам. В полярных координатах граница области интегрирования определяется уравнением $r=R.$ Следовательно,

$$S=2\int_0^{2\pi}\left(\int_0^R\frac{R}{\sqrt{R^2-\rho^2}}\rho d\rho\right)d\varphi=2R\int_0^{2\pi}\left[-\sqrt{R^2-\rho^2}\right]_0^R d\varphi=2R\int_0^{2\pi}Rd\varphi=4\pi R^2.$$

Пример 2. Найти площадь той части поверхности цилиндра $x^2+y^2=a^2$, которая вырезается цилиндром $x^2+z^2=a^2$.



Решение. На рисунке изображена $1/8$ часть искомой поверхности. Уравнение поверхности имеет вид $z=\sqrt{a^2-x^2}$; поэтому $\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}},\frac{\partial z}{\partial y}=0;$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

Область интегрирования представляет собой четверть круга, т.е. определяется условиями $x^2+y^2\le a^2,\ x\ge 0,\ y\ge 0.$

Следовательно,

$$\frac{1}{8}S=\int_0^a\left(\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}dy\right)dx=a\int_0^a\frac{y}{\sqrt{a^2-x^2}}\Bigg|_0^{\sqrt{a^2-x^2}}dx=a\int_0^a dx=a^2\Rightarrow S=8a^2.$$

II. *Некоторые физические приложения двойного интеграла.*

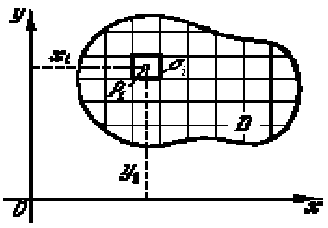


Рис. 16

1). ***Вычисление массы пластинки.*** Рассмотрим на плоскости *Oxy* материальную пластинку, то есть некоторую область *D*, по которой распределена масса *m* с плотностью $\rho(x,y)$. Разобьем область *D* на частичные области $\boldsymbol{D}_1, \boldsymbol{D}_2, \ldots, \boldsymbol{D}_n$ с площадями $\Delta\boldsymbol{S}_1, \Delta\boldsymbol{S}_2, \ldots, \Delta\boldsymbol{S}_n$ (рис. 16). Выберем в каждой частичной области произвольную точку $P_k(x_k, y_k)$, будем считать, что плотность во всех точках частичной области постоянна и равна плотности $\rho(x_k, y_k)$ в выбранной точке. Тогда масса *k*-ой ячейки будет приближенно равна $\rho(x_k, y_k)\Delta S_k$, а масса всей пластинки $m \approx \sum\limits_{k=1}^{n} \rho(x_k, y_k)\Delta S_k$.

Эта сумма является интегральной суммой для функции $\rho(x,y)$ по области *D*. Переходя к пределу при условии, что диаметр разбиения области *D* стремится к 0, получим точное значение массы пластинки:

$$\boxed{m = \iint\limits_D \rho(x,y)dxdy}$$ (*физический с*мысл двойного интеграла).

2). ***Статические моменты и центр тяжести пластинки.*** Если на плоскости *Oxy* дана материальная пластинка *D*, по которой распределена масса с плотностью $\rho(x,y)$, то координаты ее центра тяжести $C(\xi,\eta)$ пластинки вычисляются по формулам:

$$\xi = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy}, \quad \eta = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy}{\iint\limits_D \rho(x,y)dxdy},$$

где $M_x = \iint\limits_D y\rho(x,y)dxdy,\quad M_y = \iint\limits_D x\rho(x,y)dxdy$ - статические моменты пластинки относительно осей *Ox* и *Oy* соответственно.

Если пластинка однородна, т.е. $\rho(x,y) = const,$ то формулы упрощаются:

$$\xi = \frac{\iint\limits_D xdxdy}{S}, \eta = \frac{\iint\limits_D ydxdy}{S},$$ где *S* - площадь пластинки.

3). ***Моменты инерции пластинки.*** Моменты инерции материальной пластины *D*, по которой распределена масса с плотностью $\rho(x,y)$, относительно начала координат и осей координат *Ox* и *Oy* вычисляются соответственно по формулам: $I_o = \iint\limits_D (x^2 + y^2)\rho(x,y)dxdy = I_x + I_y$,

$I_x = \iint\limits_D y^2\rho(x,y)dxdy, \quad I_y = \iint\limits_D x^2\rho(x,y)dxdy.$

§2. Тройные интегралы.

Тройной интеграл является аналогом двойного интеграла и вводится для функции трех переменных. Тройные интегралы, как и двойные, имеют широкое применение в различных геометрических и физических задачах.

2.1. Определение тройного интеграла. Пусть функция $f(x,y,z)$ определена в ограниченной замкнутой пространственной области *T*.

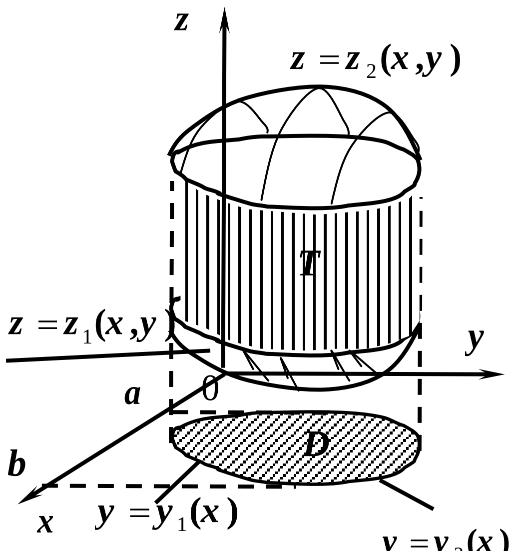


Рис. 1

Разобьём область *T* произвольным образом на *n* элементарных областей $T_1, T_2, \ldots, T_n$ с объемами $\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$ и диаметрами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (диаметром λ_k области T_k называется наибольшее из расстояний между любыми двумя точками границы этой области). Наибольший из диаметров обозначим через λ. Его называют диаметром разбиения области *T* (то есть $\lambda = \max\limits_{k=\overline{1,n}}\{\lambda_k\}$). В каждой частичной ячейке T_k возьмём произвольную точку $M_k(x_k, y_k, z_k)$ и вычислим в ней значение функции $f(x_k, y_k, z_k)$. Умножим $f(x_k, y_k, z_k)$ на объем соответствующей ячейки T_k и просуммируем все такие произведения, т.е.

составим сумму $\sigma = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta V_k$, которая называется ***интегральной суммой*** для функции $f(x, y, z)$ по области *T*.

Определение. *Если интегральная сумма σ при* $\lambda \to 0$ *имеет предел* (*этот предел не зависит ни от способа разбиения области T на частичные ячейки, ни от выбора точек* $\boldsymbol{M_k}$ *), то он называется* ***тройным интегралом от функции*** $f(x, y, z)$ ***по области T*** *и обозначается одним из следующих символов* $\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz$ или $\iiint\limits_T f(x, y, z)dv$.

Сама подынтегральная функция $f(x, y, z)$ при этом называется интегрируемой по области *T*, *T* называется областью интегрирования, *x, y* и *z*– переменными интегрирования, *dv* (или *dxdydz*) – элементом объема.

Таким образом,

$$\iiint\limits_T f(x, y, z)dxdydz \overset{def}{=} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k) \cdot \Delta V_k .$$

Свойства тройных и двойных интегралов аналогичны.

2.2. Геометрический и физический смысл тройного интеграла. Если $f(x, y, z) \equiv 1$ в области *T*, то тройной интеграл от этой функции равен объёму области T:

$$\iiint\limits_T dxdydz = V_T .$$

Масса тела переменной плотности $\rho = \rho(x, y, z)$, занимающего область *T*, вычисляется по формуле:

$$m_T = \iiint\limits_T \rho(x, y, z)dxdydz.$$

2.3. Вычисление тройного интеграла в прямоугольных координатах. Как и в случае двойных интегралов, вычисление тройных интегралов сводится к вычислению интегралов меньшей кратности.

Если область T ограничена снизу поверхностью $z = z_1(x, y)$, сверху поверхностью $z = z_2(x, y)$, с боков цилиндрической поверхностью и область *D* является проекцией тела T на плоскость Oxy (см. рис. 1), то для любой функции $f(x,y,z)$, непрерывной в области T, имеет место формула:

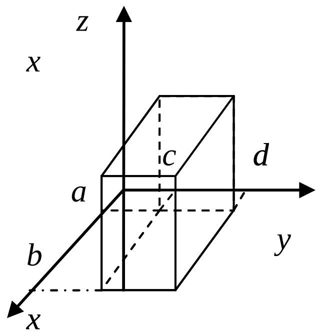
$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,.$$

В частности, если область D задается неравенствами $a \le x \le b,$ $y_1(x) \le y \le y_2(x)$ (см. рис. 1), то, переходя от двойного интеграла к повторному, получим формулу:

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz\,.$$

Таким образом, вычисление тройного интеграла по области производится, посредством трех последовательных интегрирований.

Порядок интегрирования может быть и другим, то есть переменные можно менять ролями (в зависимости от области T).

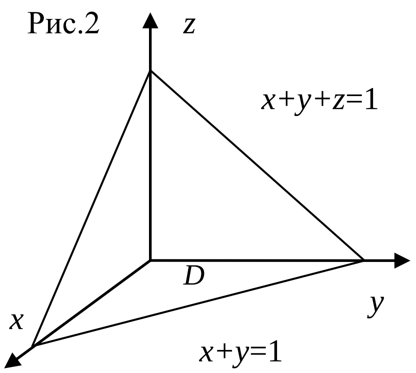


В частности, если T - параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям (рис. 3), то пределы интегрирования постоянны во всех трех интегралах: $\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_k^l f(x,y,z)dz.$

В этом случае интегрирование можно производить в любом порядке.

Пример. Вычислим тройной интеграл $I = \iiint\limits_T (x+y+z)dxdydz,$ где T - область, ограниченная координатными плоскостями $x=0,\ y=0,\ z=0$ и плоскостью $x+y+z=1$ (пирамида, изображённая на рис.2).

Рис.2



Решение. Интегрирование по z совершается от $z=0$ до $z=1-x-y$. Поэтому, обозначая проекцию области T на плоскость Oxy через D, получим: $$I=\iint\limits_D dxdy\int\limits_0^{1-x-y}(x+y+z)dz=\iint\limits_D\left((x+y)z+\frac{z^2}{2}\right)_0^{1-x-y}dxdy=$$

$$=\iint\limits_D\left((x+y)-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right)dxdy.$$

Расставим теперь пределы интегрирования по области D - треугольнику, уравнения сторон которого $x=0,\ y=0,\ x+y=1$:

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x}\left((x+y)-(x+y)^2+\frac{(1-x-y)^2}{2}\right)dy=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{(x+y)^2}{2}-\frac{(x+y)^3}{3}-\frac{(1-x-y)^3}{6}\right)_0^{1-x}dx=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{3}+\frac{x^3}{3}+\frac{(1-x)^3}{6}\right)dx=\frac{1}{8}.$$

2.4. Замена переменных в тройном интеграле. Для тройных интегралов при переходе от прямоугольных координат к новым системам координат наиболее часто используются *цилиндрические* и *сферические* координаты.

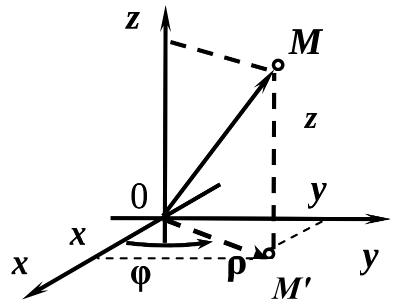


Рис. 2

При переходе от прямоугольных координат x, y, z к *цилиндрически*м координатам (ρ, φ, z) (где (ρ, φ) - полярные координаты точки M', являющейся проекцией точки M на плоскость Oxy, z - аппликата точки M), связанным с x, y, z формулами (см рис.2) $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z\quad(0\le\rho<+\infty,\ \ 0\le\varphi\le 2\pi,\ -\infty<z<+\infty)$ формула преобразования тройного интеграла имеет вид

$$\iiint\limits_T f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_T f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi,z)\rho d\rho d\varphi dz.$$

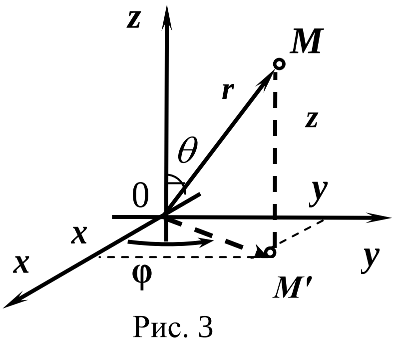


Рис. 3

В *сферической* системе координат положение точки M в пространстве определяется её расстоянием r от начала координат (длина радиуса-вектора точки), углом θ между радиусом-вектором точки и осью Oz и углом φ между проекцией радиуса-вектора точки на плоскость Oxy и осью Ox (рис. 3).

При этом θ может изменятся то 0 до π, а φ - от 0 до 2π.

Связь между сферическими и декартовыми координатами выражается формулами

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta.$$

Формула преобразования тройного интеграла к сферическим координатам имеет вид:

$$\iiint_T f(x,y,z)dxdydz = \iiint_T f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r^2\sin\theta\ drd\varphi d\theta.$$

Особенно удобно применение сферических координат в случае, когда область интегрирование T - шар с центром в начале координат или шаровое кольцо.

Пример. Вычислим объем шара радиуса R.

Решение.

$$V = \iiint_T dxdydz = \iiint_T r^2\sin\theta\, drd\varphi d\theta = \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R r^2dr = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

2.5. Применение тройных интегралов.

1). Объём тела, занимающего область T, определяется по формуле:

$$\iiint_T dxdydz = V_T.$$

2). Масса тела переменной плотности $\rho = \rho(x,y,z)$, занимающего область T, вычисляется по формуле:

$$m_T = \iiint_T \rho(x,y,z)dxdydz.$$

3). Координаты центра тяжести тела определяются по формулам:

$$\xi = \frac{\iiint_T x\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint_T \rho(x,y,z)dxdydz},\ \eta = \frac{\iiint_T y\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint_T \rho(x,y,z)dxdydz},\ \zeta = \frac{\iiint_T z\rho(x,y,z)dxdydz}{\iiint_T \rho(x,y,z)dxdydz}.$$

Величины

$$M_x = \iiint_T x\rho(x,y,z)dxdydz,\quad M_y = \iiint_T y\rho(x,y,z)dxdydz,\quad M_z = \iiint_T z\rho(x,y,z)dxdydz$$

называются *статическими моментами* тела относительно координатных плоскостей *Oyz*, *Oxz*, *Oxy* соответственно.

Если тело однородно, т. е. $\rho(x,y,z)=const$, то формулы упрощаются:

$$\xi=\frac{\iiint\limits_T xdxdydz}{V},\quad \eta=\frac{\iiint\limits_T ydxdydz}{V},\quad \zeta=\frac{\iiint\limits_T zdxdydz}{V},$$ где *V*- объём тела.

4). Моменты инерции тела относительно координатных осей соответственно равны:

$$I_x=\iiint\limits_T (y^2+z^2)\rho\, dxdydz,\quad I_y=\iiint\limits_T (x^2+z^2)\rho\, dxdydz,\quad I_z=\iiint\limits_T (x^2+y^2)\rho\, dxdydz,$$

моменты инерции тела относительно координатных плоскостей соответственно равны:

$$I_{xy}=\iiint\limits_T z^2\rho\, dxdydz,\quad I_{yz}=\iiint\limits_T x^2\rho\, dxdydz,\quad I_{zx}=\iiint\limits_T y^2\rho\, dxdydz,$$

а момент инерции тела относительно начала координат определяется по формуле:

$$I_0=\iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\rho\, dxdydz$$

(где $\rho=\rho(x,y,z)$ - плотность тела).

Пример. Вычислим момент инерции однородного шара радиуса R относительно начала координат, относительно осей координат и его кинетическую энергию относительно оси *Oz*.

В этом случае удобно перейти к сферическим координатам. Будем иметь (так как шар однородный, то $\rho(x,y,z)\equiv\delta,\ \delta=const$):

$$I_0=\iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\delta\, dxdydz=\delta\int\limits_0^{\pi} d\theta\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^{R} r^2r^2\sin\theta\, dr=\frac{4\pi\delta R^5}{5}=\frac{3}{5}MR^2,$$

где $m=\frac{3}{4}\delta\pi R^3$ — масса шара.

Так как для сферы моменты инерции относительно осей координат, очевидно, равны между собой, то, учитывая, что $I_x+I_y+I_z=2I_0$, получим

$I_x = I_y = I_z = \frac{2}{5}MR^2$. Моменты инерции тела относительно осей играют важную роль при вычислении кинетической энергии тела при его вращении около соответствующей оси. Пусть тело T вращается около оси Oz с постоянной угловой скоростью ω. Найдем кинетическую энергию J_z тела. Как известно, кинетическая энергия точки измеряется величиной $\frac{1}{2}mv^2$, где m-масса точки, а v - величина ее скорости. Кинетическая энергия системы точек определяется как сумма кинетических энергий отдельных точек, а кинетическая энергия тела - как сумма кинетических энергий всех частей, на которые оно разбито. Это обстоятельство позволяет применить для вычисления кинетической энергии интеграл.

Возьмем какую-нибудь окрестность dv точки $P(x, y, z)$ тела T. Величина линейной скорости v точки P при вращении около оси Oz равна $\omega\sqrt{x^2 + y^2}$, и значит, кинетическая энергия части dv тела T выразится так:

$\frac{1}{2}\rho(P)dv\omega^2(x^2 + y^2)$, где $\rho(P) = \rho(x, y, z)$ - плотность тела в точке Р. Тогда кинетическая энергия всего тела будет равна

$$K_z = \iiint\limits_T \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2)\rho(P)dv = \frac{1}{2}\omega^2\iiint\limits_T (x^2 + y^2)\rho(P)dxdydz, \text{ т.е. } K_z = \frac{1}{2}\omega^2 I_z.$$

Теоретические вопросы по теме двойные и тройные интегралы.

1.Понятие двойного и тройного интеграла. Их геометрический и физический смысл.

2. Основные свойства интегралов. Теорема о среднем.

3. Вычисление двойных и тройных интегралов.

4. Замена переменных в двойном интеграле. Переход к полярным координатам.

5. Цилиндрические и сферические координаты при вычислении тройных интегралов.

6. Приложения двойных и тройных интегралов.

Теоретические задания.

1. При неаккуратном стирании с доски на ней осталось от решенной задачи только $\int\limits_0^1 \int\limits_{2x}^{3x}$. По какой переменной вычислялся внутренний интеграл? Восстановите область интегрирования.

2. После стирания с доски осталось нестертым $\int\limits_{-y}^{\sqrt{y}}$. Какой это интеграл: внутренний или внешний? По какой переменной он взят? Что можно сказать об области интегрирования?

3.С помощью теоремы о среднем найти $\iint\limits_{x^2+y^2\le R^2} f(x,y)dxdy$, где $f(x,y)$ - непрерывная функция.

4. Вычислить $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, если $D=\{(x,y)|\, a\le x\le b, c\le y\le d\}$, а

$f(x,y)=F''_{xy}(x,y)$.

5. Доказать равенство $\iint\limits_D f(x)g(y)dxdy=\int\limits_a^b f(x)dx\int\limits_c^d g(y)dy$, где $D=\{(x,y)|\, a\le x\le b, c\le y\le d\}$.

6. Какой из интегралов больше $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^1 f(x,y,z)dz$ или $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{1-x} dy\int\limits_0^{1-x-y} f(x,y,z)dz$, если $f(x,y,z)>0$.

7. Используя геометрический смысл двойного интеграла, вычислите:

$a)$ $\iint\limits_D \sqrt{r^2-x^2-y^2}\,dxdy,\ D=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+y^2\le r^2\right\};$

$b)$ $\iint\limits_D C dxdy,\ D=\left\{(x,y)\middle|\, x^2+y^2\le r^2\right\}.$

Упражнения.

1. Изменить порядок интегрирования, сделать чертеж области:

а) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx$;   *б*) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{y} f(x,y)dx$;

в) $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy$;   *г*) $\int\limits_0^4 dx\int\limits_{\frac{x}{2}}^{\sqrt{x}} f(x,y)dy$;

д) $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$;   *е*) $\int\limits_{-6}^2 dy\int\limits_{\frac{y^2}{4}-1}^{2-y} f(x,y)dx$;

ж) $\int\limits_1^2 dx\int\limits_x^{2x} f(x,y)dy$;   *з*) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{2x}^{5x} f(x,y)dy$;

и) $\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)dx$;   *к*) $\int\limits_{-3}^0 dx\int\limits_{-x}^3 fdy+\int\limits_0^3 dx\int\limits_x^3 fdy$;

л) $\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{x^2} fdy+\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} fdy$;   *м*) $\int\limits_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dy\int\limits_y^{\sqrt{1-y^2}} fdx+\int\limits_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 dy\int\limits_{-y}^{\sqrt{1-y^2}} fdx$;

н) $\int\limits_0^{\pi/4} dx\int\limits_0^{\sin x} fdy+\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dx\int\limits_0^{\cos x} fdy$;   *о*) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^0 fdx+\int\limits_{-1}^0 dy\int\limits_y^0 fdx$.

2. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторных интегралов, если область D ограничена указанными линиями:

а) $D: y=x^2,\ y=\sqrt{x}$;   *б*) $D: x=0,\ y=0,\ x+y=2$;

в) $D: y=x,\ y=2x,\ x+y=6$;   *г*) $D: x^2+y^2=1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$;

д) $D: x+y=1,\ x-y=1,\ x\ge 0$;   *е*) $D: y=x^2,\ y=4-x^2$;

ж) $D: x=0,\ y=1,\ y=-1,\ y=\log_{1/2} x$;   *з*) $D: y=0,\ x=\sqrt{y},\ y=\sqrt{8-x^2}$.

3. Вычислить двойной интеграл по области, ограниченной данными линиями, сделать чертеж области:

а) $\iint\limits_D e^{x+y}dxdy;\quad D: x=0,\ x=1,\ y=0,\ y=2$;

б) $\iint\limits_D \frac{1}{(x+y)^2}dxdy;\quad D: x=3,\ x=4,\ y=1,\ y=2$;

в) $\iint\limits_D \left(xy-4x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$;

г) $\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}$;

д) $\iint\limits_D 3y^2\sin\frac{xy}{2}dxdy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x$;

е) $\iint\limits_D y^2e^{-xy/2}dxdy;\quad D: x=0,\ \ y=1,\ y=\frac{x}{2}$;

ж) $\iint\limits_D x\cos(x+y)dxdy;\quad D: y=0,\ x=\pi,\ y=x$;

з) $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy;\quad D: y=x,\ x=2,\ xy=1$;

и) $\iint\limits_D e^{\frac{x}{y}}dxdy;\quad D: x=0,\ x=y^2,\ y=1$;

к) $\iint\limits_D dxdy;\quad D: y=2-x,\ y^2=4x+4$.

4. Вычислить интеграл, используя полярные координаты:

а) $\int\limits_{-2}^{2}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\frac{e^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}dy$; *б*) $\int\limits_{0}^{2}dx\int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}}\ln\left(1+x^2+y^2\right)dy$;

в) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy$, где D – круг $x^2+y^2\le 4x$;

г) $\iint\limits_D dxdy$, где D – область ограничена линией $\left(x^2+y^2\right)^2=2xy$;

д) $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy$, где D – часть кольца $1\le x^2+y^2\le 9$, $\frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le x\sqrt{3}$;

е) $\iint\limits_D \sqrt{4-x^2-y^2}\,dxdy$, где D – круг $x^2+y^2\le 2x$.

5. Вычислить интегралы, используя соответствующую замену переменных:

а) $\iint\limits_D xydxdy$, где D – область, ограниченная эллипсом и лежащая в первой четверти;

б) $\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dxdy$, где D – область, ограниченная линией $\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}\right)^4=\frac{xy}{\sqrt{6}}$ и лежащая в первой четверти;

в) $\iint\limits_D dxdy$, где D – область, ограниченная параболами $y^2=2x,\ y^2=3x$ и гиперболами $xy=1,\ xy=2$.

6. Оценить интегралы:

а) $\iint\limits_D (1+x+y)dxdy$, где D – прямоугольник $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 2$;

б) $\iint\limits_D (x+1)^y\,dxdy,$ где D –квадрат $0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2$;

в) $\iint\limits_D (x+y+10)dxdy,$ где D –круг $x^2+y^2\le 4$;

г) $\iint\limits_D \left(x^2+y^2-4x-4y+10\right)dxdy$, где D – область, ограниченная эллипсом $x^2+4y^2-2x-16y+13=0$.

7. Найти средние значения указанных функций в данных областях:

а) $f(x,y)=12-2x-3y$ в области, ограниченной прямыми $x=0,\ y=0$, $12-2x-3y=0$;

б) $f(x,y)=x+6y$, в треугольнике, ограниченном прямыми $y=x,\ \ y=5x$ и $x=1$;

в) $f(x,y)=xy$ в области, ограниченной осью Ox и верхней полуокружностью $(x-2)^2+y^2=1$.

8. Найти площади плоских фигур, ограниченных заданными линиями:

а) $y = x, \quad y = 5x, \quad x = 1$;

б) $y = \sqrt{x}, y = 2\sqrt{x}, x = 4$;

в) $y = x^2, \quad y = \dfrac{1}{x}, \quad y = 2$;

г) $y = 3^x, y = -x^2, x = 0, x = 2$;

д) $x^2 - 4x + y^2 = 0, \quad x^2 - 8x + y^2 = 0, \quad y = \sqrt{3}x, \quad y = 0$;

е) $y^2 - 2y + x^2 = 0, \quad y^2 - 6y + x^2 = 0, \quad y = x, \quad x = 0$;

ж) $(x^2 + y^2)^2 = 16(x^2 - y^2)$;

з) $(x^2 + y^2)^3 = x^4 + y^4$;

и) $\left(x^2 + y^2\right)^2 = 2x^3$;

к) $\rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$.

9. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями:

а) $z = x^2 + y^2 + 1, \ x = 0, \ y = 0, \ z = 0, \ x = 4, \ y = 4$;

б) $z = x^2 + y^2, \ z = 0, \ y = 1, \ y = 2x, \ y = 6 - x$;

в) $z = \dfrac{y^2}{2}, \ x = 0, \ z = 0, \ y = 0, \ 2x + 3y = 12$;

г) $x + y - 2 = 0, \quad z = x^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0$;

д) $y = \sqrt{x}, \ z = 0, \ z = 1, \ x + y = 6, \ y = 0$;

е) $y = 1 - z^2, \ y = x, \ y = -x, \ y \geq 0, \ z \geq 0$;

ж) $x^2 + y^2 + 2x = 0, \quad z = \dfrac{17}{4} - y^2, \quad z = 0$;

з) $x^2 + y^2 = 9x, \quad x^2 + y^2 = 12x, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad y \geq 0$;

и) $y = 2x^2 - 5, \ y = -3, \ z = 2 + \sqrt{x^2 + 4y^2}, \ z = -1 + \sqrt{x^2 + 4y^2}$;

к) $y = 2x^2 - 3, \ y = -7x^2 + 6, \ z = 1 - 5x^2 - 6y^2, \ z = -3 - 5x^2 - 6y^2$;

л) $z=\sqrt{16-x^2-y^2}$, $6z=x^2+y^2$;

м) $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{\dfrac{x^2+y^2}{80}}$;

н) $z=\sqrt{81-x^2-y^2}$, $x^2+y^2=45$, $z=5$ (внутри цилиндра).

10. Вычислить площадь:

а) части поверхности $z=xy$, расположенной над прямоугольником в плоскости *Оху*, ограниченным прямыми $x=0,\ x=2,\ y=0,\ y=4$;

б) части плоскости части плоскости $x+y+2z=2$, расположенной в первом октанте;

в) части поверхности шара $x^2+y^2+z^2=100$, заключенной между плоскостями $x=-8,\ x=6$;

г) части поверхности конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, вырезанной цилиндром $z^2=2y$;

д) части поверхности параболоида $2z=x^2+y^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2+y^2=1$.

11. Найти массу плоской пластинки D, ограниченной указанными кривыми, с поверхностной плотностью μ:

а) $D: y^2=\dfrac{x}{2},\ x=2, y=0\ (y\ge 0),\ \mu=4x+6y^2$;

б) $D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=9, x=0, y=0\ (x\le 0, y\ge 0), \mu=(y-2x)/(x^2+y^2)$;

в) $D: y=x^2-1,\ x+y=1,\ \mu=2x+5y+8$;

г) $D: y^2=1-x,\ x=0,\ \mu=2-x-y.$

12. Найти массу круга, плотность которого в каждой точке пропорциональна расстоянию от этой точки до контура круга.

13. Плоское кольцо ограничено двумя концентрическими окружностями, радиусы которых равны 1 и 2. Найти массу кольца, если плотность материала обратно пропорциональна расстоянию от центра окружностей и плотность на меньшей окружности равна 1.

14. Найти центр тяжести плоской пластинки D, ограниченной указанными кривыми, с поверхностной плотностью μ:

а) $D: y^2 = 4x + 4,\ y^2 = -2x + 4,\ \mu = const$;

б) $D: y = x^2, y^2 = x,\ \mu = xy$;

в) $D: \rho = 1 + \cos\varphi,\ \mu = const$

г) $D: y = -x^2 + 2x,\ y = 0,\ \mu = const.$

15. Найти статические моменты однородных плоских фигур:

а) полукруга относительно его диаметра;

б) круга относительно касательной;

в) треугольника относительно одной из его сторон (доказать, что он зависит только от соответствующей высоты треугольника);

г) фигуры, ограниченной линиями $y = x^2,\ y + x = 2,\ y = 0$.

16. Найти моменты инерции однородных плоских фигур:

а) прямоугольника относительно его сторон;

б) квадрата относительно одной из вершин;

в) треугольника, ограниченного прямыми $x = 2,\ y + x = 2,\ y = 2$, относительно оси Ox;

г) полукруга относительно его диаметра.

17. Вычислить тройной интеграл по области T, ограниченной заданными поверхностями:

а) $\iiint\limits_T (2x^2 + 3y + z)dxdydz; T: 2 \le x \le 3, -1 \le y \le 2, 0 \le z \le 4$;

б) $\iiint\limits_T 2xy^2 zdxdydz; T: 0 \le x \le 3, -2 \le y \le 0, 1 \le z \le 2$;

в) $\iiint\limits_T xdxdydz; T: y = 10x,\ y = 0,\ x = 1,\ z = xy,\ z = 0$;

г) $\iiint\limits_T x\,dx\,dy\,dz;\ T: y=10x,\ y=0,\ x=1,\ z=xy,\ z=0$;

д) $\iiint\limits_T \dfrac{1}{\left(1+\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{8}\right)^4}\,dx\,dy\,dz;\ T: \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{4}+\dfrac{z}{8}=1,\ y=0,\ x=0,\ z=0$;

е) $\iiint\limits_T y\cos(z+x)\,dx\,dy\,dz;\ T: y=\sqrt{x},\ y=0,\ z=0,\ x+z=\dfrac{\pi}{2}$;

ж) $\iiint\limits_T 15\left(y^2+z^2\right)dx\,dy\,dz;\ T: z=x+y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0$;

з) $\iiint\limits_T \left(1+2x^3\right)dx\,dy\,dz;\ T: y=36x,\ y=0,\ x=1,\ y=0,\ z=0,\ z=\sqrt{xy}$.

18. Вычислить тройной интеграл с помощью цилиндрических или сферических координат:

а) $\iiint\limits_T (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz;\ T: x^2+y^2+z^2=4,\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0$;

б) $\iiint\limits_T y\,dx\,dy\,dz;\ T: 4\le x^2+y^2+z^2\le 16,\ y\le\sqrt{3}x,\ y\ge 0,\ z\ge 0$;

в) $\iiint\limits_T \dfrac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz;\ T: z=2\left(x^2+y^2\right),\ y\ge 0,\ y\le\dfrac{1}{\sqrt{3}}x,\ z=18$;

г) $\iiint\limits_T \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy\,dz;\ T: x^2+y^2=16y,\ y+z=16,\ x\ge 0,\ z\ge 0$;

д) $\iiint\limits_T dx\,dy\,dz;\ T: x^2+y^2=1,\ 0\le z\le 2$;

е) $\iiint\limits_T z\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz;\ T: x^2+y^2=2x,\ y\ge 0,\ 0\le z\le 1$;

ж) $\iiint\limits_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz;\ T: x^2+y^2+z^2=4,\ \ z\ge 0$.

19. Найти координаты центра тяжести однородного тела, занимающего область T, ограниченную указанными поверхностями:

а) $T:\ z=5(x^2+y^2),\ x^2+y^2=2,\ z=0$;

б) $T:\ z=2\sqrt{x^2+y^2},\ z=8$;

в) $T:\ x=6\sqrt{y^2+z^2}, y^2+z^2=9, x=0$;

г) $T:\ \ x+y+z=8,\quad x=0, y=0,\quad z=0,\quad x=2,\quad y=4$ (усеченный параллелепипед);

д) цилиндрами $y=\sqrt{x},\ y=2\sqrt{x}$ и плоскостями $z=0$ и $x+z=6$;

е) цилиндром $z=\dfrac{y^2}{2}$ и плоскостями $x=0$, $y=0$, $z=0$ и $2x+3y-12=0$.

20. Найти моменты инерции однородных тел с массой *M*:

а) прямоугольного параллелепипеда относительно центра тяжести;

б) шара относительно касательной прямой;

в) прямого круглого цилиндра относительно диаметра основания и относительно диаметра его среднего сечения;

г) эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ относительно каждой из его трех осей.

21. Найти массу:

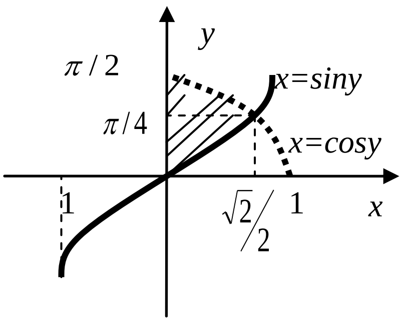
а) тела, ограниченного двумя концентрическими шаровыми поверхностями радиусов 1 и 2, если плотность материала обратно пропорциональна расстоянию от центра сфер и на расстоянии, равном 1, равна γ;

б) куба $0\le x\le a, 0\le y\le a, 0\le z\le a$, если плотность в точке (x,y,z) задается функцией $\gamma(x,y,z)=x+y+z$;

в) тела, ограниченного прямым круглым цилиндром радиуса *R*, высоты *H*, если его плотность в любой точке равна квадрату расстояния этой точки от центра основания цилиндра.

Задачи для самостоятельного решения.

Пример. Изменить порядок интегрирования: $\int\limits_0^{\pi/4} dy \int\limits_0^{\sin y} f dx + \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int\limits_0^{\cos y} f dx$.



Решение. Сделаем чертеж области. Тогда

$$\int_0^{\pi/4} dy \int_0^{\sin y} f dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} dy \int_0^{\cos y} f dx = \int_0^{\sqrt{2}/2} dx \int_{\arcsin x}^{\arccos x} f dy .$$

Задание 1. Изменить порядок интегрирования, сделать чертеж области.

1. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^{0} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f dx .$

2. $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{-y}}^{0} f dx .$

3. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y^2}} f dx .$

4. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{\sqrt{2-y}} f dx .$

5. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} f dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{x}^{0} f dy .$

6. $\int_{0}^{1/\sqrt{2}} dy \int_{0}^{\arcsin y} f dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{1} dy \int_{0}^{\arccos y} f dx .$

7. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{0}^{\sqrt{2+y}} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{0}^{\sqrt{-y}} f dx .$

8. $\int_{0}^{1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_{1}^{e} dy \int_{-1}^{-\ln y} f dx .$

9. $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{0}^{x^2} f dy .$

10. $\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy + \int_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f dy .$

11. $\int_{0}^{1} dx \int_{1-x^2}^{1} f dy + \int_{1}^{e} dx \int_{\ln x}^{1} f dy .$

12. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt[3]{y}} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f dx .$

13. $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x} f dy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy .$

14. $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^{0} f dy + \int_{-1}^{0} dx \int_{\sqrt[3]{x}}^{0} f dy .$

15. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{\sqrt{y}} f dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f dx .$

16. $\int_{0}^{-1} dy \int_{-\sqrt{y}}^{0} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{-\sqrt{2-y}}^{0} f dx .$

17. $\int_{0}^{1} dy \int_{-y}^{0} f dx + \int_{1}^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^{0} f dx .$

18. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y^2} f dx + \int_{1}^{2} dy \int_{0}^{2-y} f dx .$

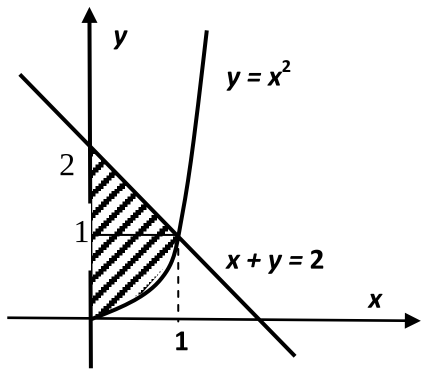
19. $\int_{0}^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^{0} f dy + \int_{\sqrt{3}}^{2} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{0} f dy .$

20. $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^{0} f dx + \int_{-1}^{0} dy \int_{\sqrt[3]{y}}^{0} f dx .$

21. $\int_{0}^{1} dy \int_{0}^{y} f dx + \int_{1}^{e} dy \int_{\ln y}^{1} f dx .$

22. $\int_{0}^{1} dx \int_{0}^{x^2} f dy + \int_{1}^{\sqrt{2}} dx \int_{0}^{\sqrt{2-x^2}} f dy .$

Пример. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторных интегралов, если область D ограничена линиями $y=x^2,\ x+y=2,$ $x\geq 0$.



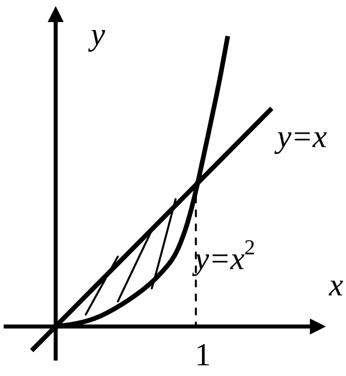
Решение. Сделаем чертеж области. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{2-x} f(x,y)dx=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx.$$

Задание 2. Представить двойной интеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$ в виде повторных интегралов, если область D ограничена указанными линиями.

1. $D: y=\sqrt{4-x^2},\ y=\sqrt{3x},\ x\geq 0$.
2. $D: x^2=2y, 5x-2y-6=0$.
3. $D: x=\sqrt{8-y^2},\ y=x,\ y\geq 0$.
4. $D: x\geq 0,\ y\geq 0,\ y\leq 1,\ y=\ln x$.
5. $D: x^2=2-y,\ x+y=0$.
6. $D: y=\sqrt{2-x^2},\ y=x^2$.
7. $D: y=x^2-2,\ y=x.$
8. $D: x\geq 0,\ y\geq 1,\ y\leq 3,\ y=x.$
9. $D: y^2=2x,\ x^2=2y,\ x\leq 1.$
10. $D: x\geq 0,\ y\geq x,\ y=\sqrt{9-x^2}$.
11. $D: y^2=2-x,\ y=x.$
12. $D: x=\sqrt{2-y^2},\ x=y^2,\ y\geq 0.$
13. $D: y\geq 0,\ x+2y-12=0,\ y=\lg x.$
14. $D: x\leq 0,\ y\geq 1,\ y\leq 3,\ y=-x.$
15. $D: y=0,\ y\geq x,\ y=-\sqrt{2-x^2}$.
16. $D: y^2=x+3,\ y=-x.$
17. $D: y=\sqrt{4-x^2},\ x\geq 0,\ x=1, y=0.$
18. $D: =-10,\ x=-2,\ y\geq 0,\ y=x^2.$
19. $D: x=\sqrt{1-y^2},\ y=-x^2,\ y\leq 0.$
20. $D: x\leq 0,\ y=1,\ y=4,\ y=-x.$
21. $D: y=3-x^2,\ y=-x.$
22. $D: y=x^2+4,\ y\geq 0,\ x=-2,\ x=0.$

Пример. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D (x+y)dxdy$ по области *D*, ограниченной линиями $y=x$ и $y=x^2$, сделать чертеж области.



Решение. Область интегрирования D изображена на рисунке. Возьмем внешний интеграл по переменной x, а внутренний - по y. Получим:

$$\iint\limits_D (4x^3y + y)dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{x} (4x^3y + y)dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(4x^3 \frac{y^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right)\Bigg|_{y=x^2}^{y=x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(2x^3 \cdot x + \frac{x^2}{2} - 2x^3 \cdot x^2 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \int\limits_0^1 \left(2x^4 + \frac{x^2}{2} - 2x^5 - \frac{x^4}{2} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\frac{3}{2}x^4 + \frac{x^2}{2} - 2x^5 \right) dx = \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^6}{6} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{10.} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3}{10}.$$

Задание 3. Вычислить двойной интеграл, сделать чертеж области.

1. $\iint\limits_D \left(12x^2y^2 + 16x^3y^3\right)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$.

2. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt{x}$.

3. $\iint\limits_D \left(36x^2y^2 - 96x^3y^3\right)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = -x^3,\ y = \sqrt[3]{x}$.

4. $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

5. $\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt[3]{x}$.

6. $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt[3]{x}$.

7. $\iint\limits_D \left(18x^2y^2 + 32x^3y^3\right)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = x^3,\ y = -\sqrt{x}$.

8. $\iint\limits_D \left(27x^2y^2 + 48x^3y^3\right)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = -x^3,\ y = \sqrt{x}$.

9. $\iint\limits_D \left(4xy + 3x^2y^2\right)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = x^2,\ y = -\sqrt{x}$.

10. $\iint\limits_D \left(12xy + 9x^2y^2\right)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = -x^2,\ y = \sqrt{x}$.

11. $\iint\limits_D \left(8xy + 9x^2y^2\right)dxdy; \quad D: x = 1,\ y = -x^3,\ y = \sqrt[3]{x}$.

12. $\iint\limits_D \left(24xy+18x^2y^2\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

13. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy+\frac{9}{11}x^2y^2\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt{x}$.

14. $\iint\limits_D \left(8xy+18x^2y^2\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt[3]{x}$.

15. $\iint\limits_D \left(\frac{4}{5}xy+9x^2y^2\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt{x}$.

16. $\iint\limits_D \left(9x^2y^2+25x^4y^4\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

17. $\iint\limits_D \left(24xy-48x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt{x}$.

18. $\iint\limits_D \left(6xy+24x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^2,\ y=\sqrt{x}$.

19. $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$.

20. $\iint\limits_D \left(4xy+16x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^3,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

21. $\iint\limits_D \left(44xy+16x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=x^2,\ y=-\sqrt[3]{x}$.

22. $\iint\limits_D \left(4xy+176x^3y^3\right)dxdy;\quad D: x=1,\ y=-x^3,\ y=\sqrt[3]{x}$.

Задание 4. Вычислить двойной интеграл, сделать чертеж области.

1. $\iint\limits_D ye^{xy/2}dxdy;\quad D: x=4,\ x=2,\ y=\ln 2,\ y=\ln 3$.

2. $\iint\limits_D y^2\sin\frac{xy}{2}dxdy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=\frac{x}{2}$.

3. $\iint\limits_D y^2e^{-xy/4}dxdy;\quad D: x=0,\ x=y,\ y=2$.

4. $\iint\limits_D y\cos xy\,dxdy;\quad D: x=1,\ x=2,\ y=\pi,\ y=\frac{\pi}{2}$.

5. $\iint\limits_D y^2\cos\frac{xy}{2}dxdy;\quad D: x=4,\ x=0,\ y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ y=x$.

6. $\iint\limits_D y\sin xydxdy;\quad D: x=1,\ x=2,\ y=\pi,\ y=\dfrac{\pi}{2}.$

7. $\iint\limits_D 4ye^{2xy}dxdy;\quad D: x=1,\ x=0{,}5,\ y=\ln 4,\ y=\ln 3.$

8. $\iint\limits_D 4y^2\sin xydxdy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\ y=x.$

9. $\iint\limits_D y^2e^{-\frac{xy}{8}}dxdy;\quad D: x=0,\ y=2,\ y=\dfrac{x}{2}.$

10. $\iint\limits_D y\cos 2xydxdy;\quad D: x=1,\ x=\dfrac{1}{2},\ y=\pi,\ y=\dfrac{\pi}{2}.$

11. $\iint\limits_D 12y\sin 2xydxdy;\quad D: x=3,\ x=2,\ y=\dfrac{\pi}{2},\ y=\dfrac{\pi}{4}.$

12. $\iint\limits_D y^2\cos xydxdy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=x.$

13. $\iint\limits_D y^2e^{-\frac{xy}{8}}dxdy;\quad D: x=0,\ \ y=4,\ y=2x.$

14. $\iint\limits_D y^2\sin 2xydxdy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{2\pi},\ y=2x.$

15. $\iint\limits_D y^2e^{-xy/2}dxdy;\quad D: x=0,\ x=y,\ y=\sqrt{2}.$

16. $\iint\limits_D 2y\cos 2xydxdy;\quad D: x=1,\ x=2,\ y=\dfrac{\pi}{2},\ y=\dfrac{\pi}{4}.$

17. $\iint\limits_D y\sin xydxdy;\quad D: x=\dfrac{1}{2},\ x=1,\ y=\pi,\ y=2\pi.$

18. $\iint\limits_D y^2\cos 2xydxdy;\quad D: x=0,\ y=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}},\ y=\dfrac{x}{2}.$

19. $\iint\limits_D 8ye^{4xy}dxdy;\quad D: x=\dfrac{1}{4},\ x=\dfrac{1}{2},\ y=\ln 4,\ y=\ln 3.$

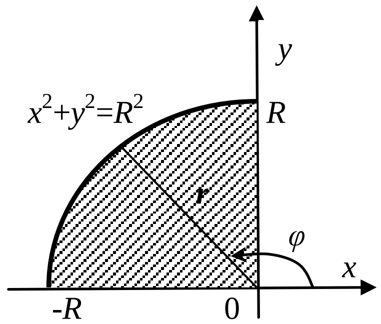
20. $\iint\limits_D y\cos xydxdy;\quad D: x=1,\ x=\dfrac{1}{2},\ y=\pi,\ y=3\pi.$

21. $\iint\limits_D y\sin 2xydxdy;\quad D: x=\dfrac{1}{2},\ x=\dfrac{1}{4},\ y=\dfrac{\pi}{2},\ y=\dfrac{3\pi}{2}.$

22. $\iint\limits_D y^2 \cos xy dx dy, \quad D: x=0,\ y=\sqrt{\pi},\ y=2x.$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\, ctg\sqrt{x^2+y^2}}$, используя полярные координаты.

Решение. Область интегрирования задается неравенствами $-R \le x \le 0$,



$0 \le y \le \sqrt{R^2-x^2}$. Это четверть круга, расположенная во втором квадранте. Перейдем к полярным координатам $x = r\cdot\cos\varphi$, $y = r\cdot\sin\varphi$.

Тогда $\sqrt{x^2+y^2} = r$, $0 \le r \le R$, $\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$, и

$$\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\, ctg\sqrt{x^2+y^2}} = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} \frac{rdr}{r\cdot ctgr} =$$

$$= \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} \frac{rdr}{r\cdot ctgr} = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} \frac{dr}{ctgr} = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} \frac{\sin rdr}{\cos r} = \int\limits_{\pi/2}^{\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{R} \frac{-d(\cos r)}{\cos r} =$$

$$= -\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \ln(\cos r)\Big|_0^R d\varphi = --\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \ln(\cos R) d\varphi = -\ln(\cos R)\varphi\Big|_{\varphi=\pi/2}^{\varphi=\pi} = -\frac{\pi \ln(\cos R)}{2}.$$

Задание 5. Вычислить интеграл, используя полярные координаты.

1. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$

2. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{tg\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$

3. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2) dy.$

4. $\int\limits_{-2}^{2} dy \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dx.$

5. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\, dy.$

6. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} tg(x^2+y^2) dy.$

7. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos(x^2+y^2) dy.$

8. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dy.$

9. $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy.$ 10. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \left(1+x^2+y^2\right) dy.$

11. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dy.$ 12. $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$

13. $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$ 14. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}.$

15. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\sin^2\sqrt{x^2+y^2}}.$ 16. $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$

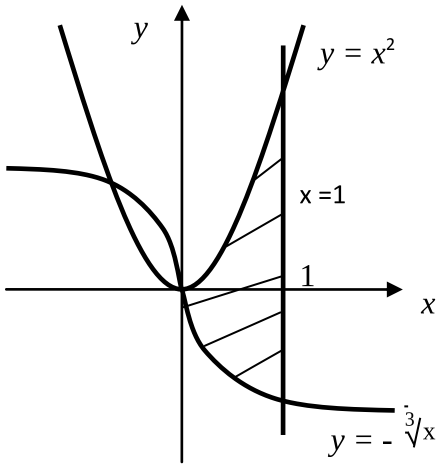
17. $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$ 18. $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy.$

19. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-\left(x^2+y^2\right)} dy.$ 20. $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{0} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$

21. $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\cos\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$ 22. $\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=-\sqrt[3]{x}$, $x=1$.

Решение. Фигура ограничена сверху графиком функции $y=x^2$, снизу графиком функции $y=-\sqrt[3]{x}$. Следовательно,



$$S=\iint\limits_D dxdy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{-\sqrt[3]{x}}^{x^2} dy=\int\limits_0^1 y\Big|_{y=-\sqrt[3]{x}}^{y=x^2} dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(x^2-\left(-\sqrt[3]{x}\right)\right)dx=\int\limits_0^1\left(x^2+\sqrt[3]{x}\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^{4/3}}{4/3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{3}+\frac{3}{4}=\frac{13}{12}.$$

Задание 6. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

1. $y=6x^2,\ x+y=2,\ x\ge 0.$ 2. $x=8-y^2,\quad x=-2y$

3. $y^2=4x,\ x+y=3,\ y\ge 0.$ 4. $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2},\quad y=\dfrac{1}{2x},\quad x=16.$

5. $x=-2y^2,\ x=1-3y^2,\ x\le 0,\ y\ge 0.$ 6. $x=5-y^2,\quad x=-4y.$

7. $y=\cos x,\quad y\le x+1,\quad y\ge 0.$ 8. $y=\dfrac{3}{x},\ y=8e^x,\ y=3,\ y=8.$

9. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0,\ x\ge 0.$ 10. $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x},\quad y=\dfrac{3}{2x},\quad x=9.$

11. $y=32-x^2,\quad y=-4x.$ 12. $y=\sin x,\ y=\cos x,\ x=0,\ x\le 0.$

13. $y=2^x,\ y=2x-x^2,\ x=2,\ x=0.$ 14. $y=3\sqrt{x},\quad y=\dfrac{3}{x},\quad x=4.$

15. $y=\dfrac{2}{x},\ y=5e^x,\ y=2,\ y=5.$ 16. $y=\dfrac{25}{4}-x^2,\quad y=x-\dfrac{5}{2}.$

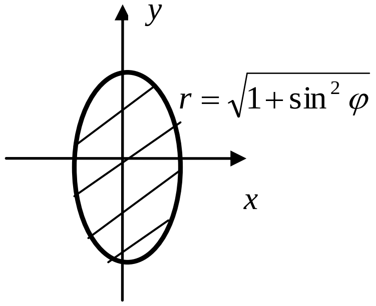
17. $xy=1,\ y=x^2,\ y=2,\ x=0.$ 18. $y=\sqrt{x},\quad y=\dfrac{1}{x},\quad x=16.$

19. $y=\dfrac{2}{x},\ y=7e^x,\ y=2,\ y=7.$ 20. $x=27-y^2,\quad x=-6y.$

21. $xy=1,\ x=y^2,\ 2=2,\ y=0.$ 22. $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x,\ y=-x^2,\ x=-2,\ x=0.$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линией $(x^2+y^2)^2=\left(x^2+2y^2\right).$

Решение. Уравнение линии в полярных координатах $x=r\cdot\cos\varphi$, $y=r\cdot\sin\varphi$ имеет вид $r=\sqrt{\cos^2\varphi+2\sin^2\varphi}$ или $r=\sqrt{1+\sin^2\varphi}$. Область,



ограниченная этой линией, изображена на рисунке. Тогда

$$S=\iint\limits_D r\,dr\,d\varphi=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\sqrt{1+\sin^2\varphi}}r\,dr=\int\limits_0^{2\pi}\left.\frac{r^2}{2}\right|_0^{\sqrt{1+\sin^2\varphi}}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left(1+\sin^2\varphi\right)d\varphi=\frac{1}{2}\varphi\Big|_0^{2\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi=\pi+\frac{1}{4}\left(\varphi-\frac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\pi+\frac{1}{2}\pi=\frac{3}{2}\pi.$$

Задание 7. Найти площадь фигуры, ограниченной данными линиями.

1. $\left(x^2+y^2\right)^2=2ax^3.$ 2. $(x^2+y^2)^2=4a^2(x^2-y^2).$

3. $(x^2+y^2)^2=8a^2xy.$ 4. $(x^2+y^2)^2=a^2\left(2x^2+3y^2\right).$

5. $(x^2+y^2)^2=a^2\left(5x^2+3y^2\right).$ 6. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy.$

7. $(x^2+y^2)^3=4x^2y^2.$ 8. $(x^2+y^2)^3=a^2x^2y^2.$

9. $\rho=\sqrt{\cos 2\varphi}.$ 10. $\rho=\sqrt{\sin 3\varphi}.$

11. $y^2+x^2=2x.$ 12. $y^2+x^2=2y.$

13. $y^2-2y+x^2=0,\ y^2-4y+x^2=0,\ y=\frac{x}{\sqrt{3}},\ y=\sqrt{3}x.$

14. $x^2-2x+y^2=0,\quad x^2-10x+y^2=0,\quad y=\sqrt{3}x,\quad y=0.$

15. $x^2-4x+y^2=0,\quad x^2-8x+y^2=0,\quad y=\frac{x}{\sqrt{3}},\quad y=0.$

16. $x^2-2x+y^2=0,\quad x^2-4x+y^2=0,\quad y=x,\quad y=0.$

17. $y^2-2y+x^2=0,\quad y^2-4y+x^2=0,\quad y=\sqrt{3}x,\quad x=0.$

18. $x^2-4x+y^2=0,\quad x^2-8x+y^2=0,\quad y=x,\quad y=0.$

19. $y^2-4y+x^2=0,\quad y^2-6y+x^2=0,\quad y=x,\quad y=0.$

20. $x^2-2x+y^2=0,\quad x^2-10x+y^2=0,\quad y=\sqrt{3}x,\quad y=0.$

21. $x^2-4x+y^2=0,\quad x^2-6x+y^2=0,\quad y=\frac{x}{\sqrt{3}},\quad y=\sqrt{3}x.$

22. $y^2-4y+x^2=0,\quad y^2-10y+x^2=0,\quad y=\frac{x}{\sqrt{3}},\quad y=\sqrt{3}x.$

Пример. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $x^2+y^2=4,$ $z=y,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0.$

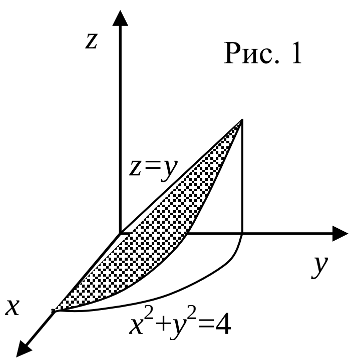


Рис. 1

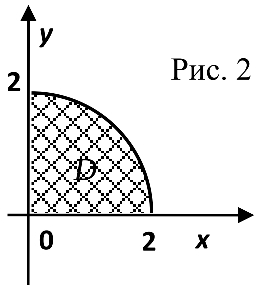


Рис. 2

Решение. Тело, объем которого требуется найти, изображено на рис. 1. Сверху тело ограничено плоскостью $z = y$, снизу областью D (см. рис.2). Тогда $V = \iint\limits_D y dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} y dy =$

$$= \int_0^2 \frac{y^2}{2}\bigg|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (4 - x^2) dx = \frac{1}{2}\left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^2 = \frac{1}{2}\cdot\left(8 - \frac{8}{3}\right) = \frac{8}{3}.$$

Задание 8. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

1. $y = 16\sqrt{2x},\ \ y = 2\sqrt{2x},\ \ z = 0,\ \ z + x = 2.$
2. $x^2 + y^2 = 2,\ \ y = \sqrt{x},\ \ y = 0,\ \ z = 0,\ \ z = 15x.$
3. $x + y = 2,\ \ y = \sqrt{x},\ \ z = 0,\ \ z = 12y.$
4. $x^2 + y^2 = 2,\ \ x = \sqrt{y},\ \ x = 0,\ \ z = 0,\ \ z = 30y.$
5. $x + y = 2,\ \ x = \sqrt{y},\ \ z = \frac{12x}{5},\ \ z = 0.$
6. $x = 17\sqrt{2y},\ \ x = 2\sqrt{2y},\ \ z = 0,\ \ z + y = \frac{1}{2}.$
7. $y = 5\sqrt{x},\ \ y = \frac{5x}{3},\ \ z = 0,\ \ z = 5 + \frac{5\sqrt{x}}{3}.$
8. $y = 17\sqrt{2x},\ \ y = 2\sqrt{2x},\ \ z = 0,\ \ x + z = \frac{1}{2}.$
9. $x^2 + y^2 = 8,\ \ y = \sqrt{2x},\ \ y = 0,\ \ z = 0,\ \ z = \frac{15x}{11}.$
10. $x + y = 4,\ \ x = \sqrt{2y},\ \ z = 0,\ \ z = \frac{3x}{5}.$
11. $z = x^2 + y^2,\ \ x + y = 1,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0.$
12. $z = 2 - (x^2 + y^2),\ \ x + 2y \le 1,\ \ x \ge 0,\ \ y \ge 0,\ \ z \ge 0.$

13. $z = x^2, \quad x - 2y + 2 = 0, \quad x + y - 7 = 0, \quad z \ge 0.$

14. $y = \sqrt{x}, \; z = 0, \; z = 1, \quad x + y = 6, x = 0.$

15. $2x + 3y - 12 = 0, \quad 2z = y^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0.$

16. $x^2 + 4y^2 = 4, \quad z = 12 - 3x - 4y, \quad z = 1.$

17. $z = 4 - y^2, \quad 2y = x^2, \quad z = 0.$

18. $z = x^2 - y^2, \quad z = 0, \quad x = 0, \; x = 1.$

19. $z = xy, \quad y = \sqrt{x}, \quad x + y = 2, \quad y = 0, \quad z = 0.$

20. $z = x^2 + y^2, \quad y = x^2, \quad z = 1.$

21. $x^2 + y^2 = 4, \quad z = y^3, \quad z = 0 \; (x \ge 0, y \ge 0).$

22. $z = 4 - (x^2 + y^2), \quad x + y \le 1, \quad x \ge 0, \quad y \ge 0, \quad z \ge 0.$

Задание 9. Найти объем тела, ограниченного заданными поверхностями.

1. $x^2 + y^2 + 2x = 0, \quad z = \frac{25}{4} - y^2, \quad z = 0.$

2. $x^2 + y^2 = y, \quad x^2 + y^2 = 4y, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0.$

3. $x^2 + y^2 = 8\sqrt{2}x, \quad z = x^2 + y^2 - 64, \quad z = 0, \quad z \ge 0.$

4. $x^2 + y^2 + 4x = 0, \quad z = 8 - y^2, \quad z = 0.$

5. $x^2 + y^2 = 6x, \quad x^2 + y^2 = 9x, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad y \le 0.$

6. $x^2 + y^2 = 6\sqrt{2}y, \quad z = x^2 + y^2 - 36, \quad z = 0, \quad z \ge 0.$

7. $x^2 + y^2 = 2y, \quad z = \frac{9}{4} - x^2, \quad z = 0.$

8. $x^2 + y^2 = 2y, \quad x^2 + y^2 = 5y, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0.$

9. $x^2 + y^2 + 2\sqrt{2}y = 0, \quad z = x^2 + y^2 - 4, \quad z = 0, \quad z \ge 0.$

10 $x^2 + y^2 = 4x, \quad z = 10 - y^2, \quad z = 0.$

11. $x^2 + y^2 = 7x, \quad x^2 + y^2 = 9x, \quad z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = 0, \quad y = 0, \quad y \le 0.$

12. $x^2 + y^2 = 8\sqrt{2}y, \quad z = x^2 + y^2 - 64, \quad z = 0, \quad z \ge 0.$

13. $x^2+y^2=2\sqrt{2}x, \quad z=x^2+y^2-4, \quad z=0, \quad z\ge 0$.

14. $x^2+y^2=3y, \quad x^2+y^2=6y, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0$.

15. $x^2+y^2=6\sqrt{2}x, \quad z=x^2+y^2-36, \quad z=0, \quad z\ge 0$.

16. $x^2+y^2=2\sqrt{2}y, \quad z=x^2+y^2-4, \quad z=0, \quad z\ge 0$.

17. $x^2+y^2=4x, \quad z=12-y^2, \quad z=0$.

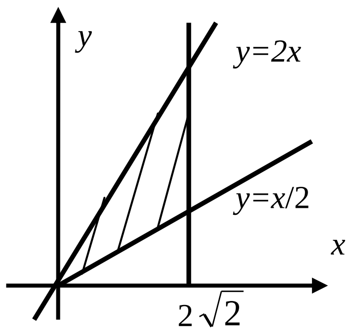
18. $x^2+y^2=8x, \quad x^2+y^2=11x, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0, \quad y=0, \quad y\le 0$.

19. $x^2+y^2=4\sqrt{2}x, \quad z=x^2+y^2-16, \quad z=0, \quad z\ge 0$.

20. $x^2+y^2=4y, \quad z=4-x^2, \quad z=0$.

21. $x^2+y^2=4y, \quad x^2+y^2=7y, \quad z=\sqrt{x^2+y^2}, \quad z=0$.

22. $x^2+y^2=4\sqrt{2}y, \quad z=x^2+y^2-16, \quad z=0, \quad z\ge 0$.



Пример. Вычислить площадь поверхности цилиндра $x^2=2z$, отсеченной плоскостями $x-2y=0,\ y=2x,\ x=2\sqrt{2}$.

Решение. Прежде всего, сделаем чертеж области D, над которой расположена поверхность $z=x^2/2$. Тогда

$\frac{\partial z}{\partial x}=x, \frac{\partial z}{\partial y}=0; \ \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\sqrt{1+x^2}$. Следовательно,

$$S=\int_0^{2\sqrt{2}}dx\int_{x/2}^{2x}\sqrt{1+x^2}\,dy=\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,y\Big|_{y=x/2}^{y=2x}dx=\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\left(2x-\frac{x}{2}\right)dx=\frac{3}{2}\int_0^{2\sqrt{2}}x\sqrt{1+x^2}\,dx=$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^{2\sqrt{2}}x\sqrt{1+x^2}\,\frac{d\left(1+x^2\right)}{2x}=\frac{3}{4}\int_0^{2\sqrt{2}}\sqrt{1+x^2}\,d\left(1+x^2\right)=\frac{3}{4}\cdot\frac{\left(1+x^2\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^{2\sqrt{2}}=13.$$

Задание 10.

1. Найти площадь той части плоскости $6x+3y+2z=12$, которая заключена в первом октанте.

2. Найти площадь той части поверхности $z^2 = 2xy$, которая находится над прямоугольником, лежащим в плоскости $z = 0$ и ограниченным прямыми $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$, $y = 6$.

3.Найти площадь части конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$.

4. Найти площадь части поверхности параболоида $y = x^2 + z^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + z^2 = 1$ и расположенной в I октанте.

5. Найти площадь части сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, вырезанной цилиндром $x^2/4 + y^2 = 1$.

6. Найти площадь той части плоскости $z = x$, которая заключена внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$ выше плоскости $z = 0$.

7. Найти площадь части поверхности цилиндра $z = x^2$, вырезанной плоскостями $x + y = \sqrt{2}, x = 0, y = 0$.

8. Найти площадь поверхности конуса $x^2 - y^2 - z^2 = 0$, заключенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 1$.

9. Найти площадь части поверхности цилиндра $x^2 + z^2 = 4$, расположенной внутри цилиндра $x^2 + y^2 = 4$.

10. Найти площадь части поверхности цилиндра $z^2 = 2xy$, вырезанной плоскостями $x = 1, y = 0, z = 0$.

11. Найти площадь части поверхности параболоида $x = 1 - y^2 - z^2$, вырезанной цилиндром $y^2 + z^2 = 1$.

12. Найти площадь части поверхности параболоида $2z = x^2 + y^2$, вырезанной цилиндром $x^2 + y^2 = 1$.

Задание 11. Пластинка D задана ограничивающими ее кривыми, μ – поверхностная плотность. Найти массу пластинки.

1. $D: y=x,\ y=-x,\ y=1,\ \mu=\sqrt{1-y}.$

2. $D: x=0,\ y=2x,\ x+y=2,\ \mu=2-x-y.$

3. $D: y=x^2,\ \ x=y^2,\ \ \mu=3x+2y+6.$

4. $D: x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ (y\geq 0),\ \mu=7x^2+y.$

5. $D: x^2+y^2=4, x^2+y^2=25, x=0, y=0 (x\geq 0, y\geq 0), \mu=(2x-3y)/(x^2+y^2).$

6. $D: x=1,\ y=0,\ y^2=4x\ (y\geq 0),\ \mu=\dfrac{7x^2}{2}+5y.$

7. $D: x^2+y^2=9,\ x^2+y^2=16,\ x=0, y=0\ (x\geq 0, y\geq 0), \mu=(2x+5y)/(x^2+y^2).$

8. $D: x=2,\ y=0,\ y^2=2x\ (y\geq 0),\ \mu=\dfrac{7x^2}{8}+2y.$

9. $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=16,\ x=0, y=0\ (x\geq 0, y\geq 0), \mu=(x+y)/(x^2+y^2).$

10. $D: x=2,\ y=0,\ y^2=\dfrac{x}{2}\ (y\geq 0),\ \mu=\dfrac{7x^2}{2}+6y.$

11. $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4,\ x=0,\ y=0\ (x\geq 0,\ y\geq 0),\ \mu=(x+y)/(x^2+y^2).$

12. $D: x=2,\ y=0,\ y^2=4x\ (y\geq 0),\ \mu=x+3y^2.$

13. $D: x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=9,\ x=0, y=0\ (x\geq 0, y\geq 0), \mu=(x-y)/(x^2+y^2).$

Задание 12. Вычислить тройной интеграл по области *T*, ограниченной заданными поверхностями.

1. $\iiint\limits_T (3x^2+y^2)dxdydz; T: z=10y,\ x+y=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

2. $\iiint\limits_V \dfrac{dxdydz}{(1+x+y+z)^3}; T: x+y+z=1,\ x=0,\ y=0,\ z=0.$

3. $\iiint\limits_V y^2\cos\left(\dfrac{\pi xy}{4}\right)dxdydz; T: x=0,\ y=-1,\ y=\dfrac{x}{2}, z=0,\ z=-\pi^2.$

4. $\iiint\limits_T (3x+4y)dxdydz; T: x=y,\ \ x=1,\ y=0,\ z=0,\ z=x^2+y^2.$

5. $\iiint\limits_T xyzdxdydz; T: x^2+y^2+z^2=1,\ \ x=0,\ y=0,\ z=0.$

6. $\iiint\limits_T x^2 z\,dx\,dy\,dz;\ T: y = 3x,\ \ x = 2,\ y = 0,\ z = 0,\ z = xy.$

7. $\iiint\limits_T \left(1 + 2x^3\right)dx\,dy\,dz;\ T: y = 9x,\ \ x = 1,\ y = 0,\ z = 0,\ z = \sqrt{xy}.$

8. $\iiint\limits_T 8y^2 z e^{-xyz}\,dx\,dy\,dz;\ T: x = 0,\ \ x = 2,\ y = 0,\ y = -1,\ z = 0,\ z = 2.$

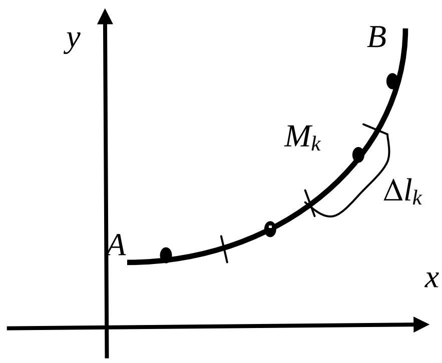
9. $\iiint\limits_T (x + 2z)\,dx\,dy\,dz;\ T: z = x^2 + 3y^2,\ y = x,\ \ x = 1,\ y = 0,\ z = 0.$

10. $\iiint\limits_V x^2 \sin x(4\pi xy)\,dx\,dy\,dz;\ T: y = \dfrac{x}{2},\ y = 0,\ x = 1,\ z = 0,\ z = 8\pi.$

ГЛАВА 2. КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

§1. Криволинейные интегралы по длине дуги (первого рода).

1.1.Определение криволинейного интеграла по длине дуги. Рассмотрим на плоскости *Oxy* непрерывную кривую *AB*, на которой определена функция $f(x, y)$.



Разобьем кривую произвольным образом на n элементарных дуг. На каждой из элементарных дуг выберем произвольно по точке $M_k(c_k, d_k)\left(k=\overline{1,n}\right)$ и умножим значение функции $f(c_k, d_k)$ в этой точке на длину Δs_k соответствующей дуги: $f(c_k, d_k)\Delta s_k$.

Сложив все полученные таким образом произведения, получим **интегральную** сумму для функции *f(x, y)* по длине дуги *AB*:

$$\sum_{k=1}^{n} f(c_k, d_k)\Delta s_k .$$

Определение. Если при $\lambda \to 0$ (где $\lambda = \max\limits_{k=\overline{1,n}}\{\Delta s_k\}$) существует предел интегральных сумм, то этот предел называется **криволинейным интегралом от функции *f*(*x, y*) по длине дуги *AB*** или **криволинейным интегралом первого рода** и обозначается символом: $\int\limits_{AB} f(x, y)ds$. Таким образом

$$\int\limits_{AB} f(x, y)ds \overset{def}{=} \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f\left(c_k, d_k\right)\Delta s_k, \text{ где } \lambda = \max_{k=\overline{1,n}}\{\Delta s_k\}.$$

1.2. Свойства криволинейного интеграла первого рода. Его геометрический и физический смысл.

1°. Значение криволинейного интеграла по длине дуги ***<u>не зависит</u> от направления кривой*** AB: $\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{BA} f(x,y)ds$.

2°. Постоянный множитель можно выносить за знак криволинейного интеграла: $\int\limits_{AB} C \cdot f(x,y)ds = C \cdot \int\limits_{AB} f(x,y)ds$.

3°. Криволинейный интеграл от суммы функций равен сумме криволинейных интегралов от этих функций:

$$\int\limits_{AB} (f(x,y) + g(x,y))ds = \int\limits_{AB} f(x,y)ds + \int\limits_{AB} g(x,y)ds.$$

4°. Если кривая AB разбита на дуги AC и CB, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{AC} f(x,y)ds + \int\limits_{CB} f(x,y)ds.$$

5°. Если в точках кривой AB $f_1(x,y) \le f_2(x,y)$, то

$$\int\limits_{AB} f_1(x,y)ds \le \int\limits_{AB} f_2(x,y)ds.$$

6°. Справедливо неравенство: $\left| \int\limits_{AB} f(x,y)ds \right| \le \int\limits_{AB} |f(x,y)| ds$.

7°. Теорема о среднем. Если функция $f(x, y)$ непрерывна на кривой AB, то на этой кривой существует точка (c, d) такая, что

$$\int\limits_{AB} f(x,y)ds = f(c,d) \cdot l_{AB}.$$

1.3. Некоторые приложения криволинейного интеграла по длине дуги.

1. Вычисление ***длины плоской кривой***:

$$\int\limits_{AB} ds = l_{AB},$$

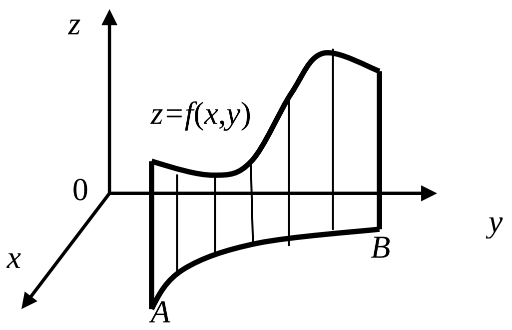
где l_{AB} - длина кривой AB (*геометрический смысл криволинейного интеграла первого рода*).

Действительно, если $f(x, y) \equiv 1$, то

$$\int_{AB} ds = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \Delta s_k = l_{AB} .$$

2. Вычисление ***массы материальной кривой***: если $\delta(x, y)$ - линейная плотность материальной кривой *AB*, то ее масса вычисляется по формуле $m = \int_{AB} \delta(x, y) ds$ (*физический смысл криволинейного интеграла первого рода*).

3. Вычисление ***площади цилиндрической поверхности***. Если $f(x, y) \geq 0$ на кривой *AB*, то $\int_{AB} f(x, y) ds$ равен площади куска цилиндрической поверхности, ограниченной снизу кривой *AB*, а сверху графиком функции $z = f(x, y)$. Образующие этой цилиндрической поверхности параллельны оси *Oz* (см. рис.).



4. ***Координаты центра масс*** материальной дуги *AB*, имеющей линейную плотность $\delta = \delta(x, y)$, определяются по формулам:

$$x_C = \frac{1}{m} \int_{AB} x \cdot \delta(x, y) ds , \; y_C = \frac{1}{m} \int_{AB} y \cdot \delta(x, y) ds ,$$ где m – масса дуги *AB*.

5. ***Моменты инерции*** относительно начала координат и осей координат материальной дуги *AB*, имеющей линейную плотность $\delta = \delta(x, y)$, вычисляются соответственно по формулам:

$$I_0 = \int_{AB} \left(x^2 + y^2\right) \cdot \delta(x, y) ds , \; I_{Ox} = \int_{AB} y^2 \cdot \delta(x, y) ds , \; I_{Oy} = \int_{AB} x^2 \cdot \delta(x, y) ds .$$

1.4. Вычисление криволинейного интеграла по длине дуги. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна на кривой *AB*.

1). Если кривая *AB* задана уравнением $y = y(x), \quad a \leq x \leq b,$ и функция $y(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную, то

$$\boxed{\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}\,dx.}$$

2). Если кривая AB задана параметрически уравнениями x=x(t), y=y(t), $\alpha \le t \le \beta$, где функции x=x(t), y=y(t) непрерывно дифференцируемы на интервале (α, β), то криволинейный интеграл по кривой AB находится по формуле:

$$\boxed{\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt}\,.$$

3). Если кривая AB задана в полярных координатах уравнением $r = r(\varphi)$, $\alpha \le \varphi \le \beta$, и функция $r(\varphi)$ непрерывна и имеет непрерывную производную, то

$$\boxed{\int\limits_{AB} f(x,y)ds = \int\limits_{\varphi_A}^{\varphi_B} f(r(\varphi)\cos\varphi, r(\varphi)\sin\varphi)\sqrt{\left(r(\varphi)\right)^2+\left(r'(\varphi)\right)^2}\,d\varphi}\,.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{AB}(x+y)ds$ по отрезку прямой, соединяющему точки A(0, 0) и B(4, 2).

Решение. Уравнение прямой AB имеет вид $y = 2x$, следовательно,

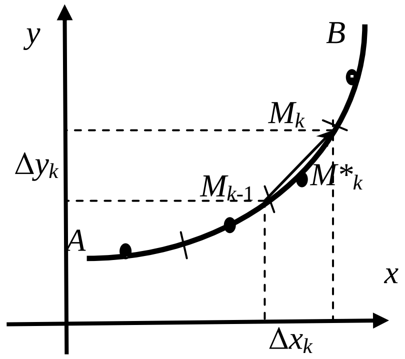
$$\int\limits_{AB}(x+y)ds = \int\limits_0^2 (x+2x)\sqrt{1+\left(\left(2x\right)'\right)^2}\,dx = \sqrt{5}\int\limits_0^2 3x\,dx = 3\sqrt{5}\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^2 = 6\sqrt{5}.$$

Замечание. Аналогично определяется и вычисляется криволинейный интеграл I рода от функции трех переменных по пространственной кривой. В частности, если пространственная кривая AB задана уравнениями x=x(t), y=y(t), z=z(t) ($\alpha \le t \le \beta$), где функции x=x(t), y=y(t), z=z(t) непрерывно дифференцируемы на интервале (α, β), то

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)ds = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,dt.$$

§2. Криволинейные интегралы по координатам (второго рода).

2.1.Определение криволинейного интеграла по координатам.



Пусть AB – непрерывная кривая на плоскости Oxy, а $P(x, y)$ и $Q(x,y)$– произвольные функции, определенные на этой кривой. Разобьем кривую точками $M_k(x_k, y_k)$ $\left(k=\overline{0,n}\right)$ на конечное число частичных дуг. На каждой из частичных дуг выберем произвольно по точке $M_k{}^*(c_k, d_k)$. Обозначим через Δx_k и Δy_k проекции вектора $\overrightarrow{M_{k-1}M_k}$ на оси координат. Сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} P(M_k^*)\cdot\Delta x_k$ называется интегральной суммой для функции $P(x, y)$ по кривой AB по координате x, а сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} Q(M_k^*)\cdot\Delta y_k$ называется интегральной суммой для функции $Q(x,y)$ по кривой AB по координате y.

Определение. Если при $\lambda\to 0$ (где $\lambda=\max\limits_{k=\overline{1,n}}\{\Delta s_k\}$) интегральные суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} P(M_k^*)\cdot\Delta x_k$ имеют конечный предел, то этот предел называется ***криволинейным интегралом по переменной x от функции P(x, y) по кривой AB*** и обозначается символом $\int\limits_{AB} P(x,y)dx$. Таким образом,

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx \overset{def}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} P(M_k^*)\Delta x_k .$$

Аналогично определяется ***криволинейный интеграл по переменной y от функции Q(x, y) по кривой AB***:

$$\int\limits_{AB} Q(x,y)dy \overset{def}{=} \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} Q(M_k^*)\Delta y_k .$$

Криволинейный интеграл второго рода, т.е. интеграл по координатам отличается от криволинейного интеграла первого рода, т.е. от интеграла по длине дуги тем, что значение функции при составлении интегральной суммы умножается не на длину частичной дуги, а на ее проекцию на соответствующую ось.

Сумму криволинейных интегралов $\int\limits_{AB} P(x,y)dx + \int\limits_{AB} Q(x,y)dy$ называют ***общим криволинейным интегралом второго рода*** и обозначают символом

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy\ .$$

Теорема. Если кривая AB – кусочно-гладкая, а функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ и – непрерывны на кривой AB, то криволинейные интегралы

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx;\quad \int\limits_{AB} Q(x,y)dy;\ \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

существуют.

2.2. Свойства криволинейного интеграла второго рода. Свойства криволинейного интеграла второго рода аналогичны свойствам криволинейного интеграла первого рода. Но в отличие от криволинейного интеграла первого рода ***криволинейный интеграл второго рода <u>зависит</u> от того, в каком направлении*** (от A к B или от B к A) ***проходится кривая AB*** и меняет знак при изменении направления обхода кривой, то есть

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = -\int\limits_{BA} P(x,y)dx,\ \int\limits_{AB} Q(x,y)dy = -\int\limits_{BA} Q(x,y)dy.$$

Действительно, при изменении направления обхода кривой соответственно изменяются знаки проекций Δx_k и Δy_k в интегральных суммах $\sum\limits_{k=1}^{n} P(M_k^*)\cdot \Delta x_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} Q(M_k^*)\cdot \Delta y_k$, следовательно, сами суммы и их пределы (интегралы) изменяют знак.

Таким образом, при вычислении криволинейных интегралов второго рода необходимо учитывать направление обхода кривой.

В случае, когда интегрирование проводится по замкнутой кривой L, из двух возможных направлений обхода контура *положительным* считают направление по ходу часовой стрелки. Противоположное направление называют *отрицательным*.

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру в положительном направлении часто обозначают символом $\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Отметим, что криволинейный интеграл по замкнутому контуру не зависит от выбора начальной точки, а зависит только от направления обхода кривой.

2.3. Вычисление криволинейных интегралов второго рода. Вычисление криволинейных интегралов второго рода производится путем сведения их к определенным интегралам.

Пусть функция $f(x,y)$ непрерывна на кривой AB.

1). Если кривая AB задана уравнением $y = y(x),\quad a \le x \le b,$ и функция $y(x)$ непрерывна и имеет непрерывную производную, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_{x_A}^{x_B} P(x,y(x))dx\,,\quad \int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int\limits_{x_A}^{x_B} Q(x,y(x))\,y'(x)dx\,,$$

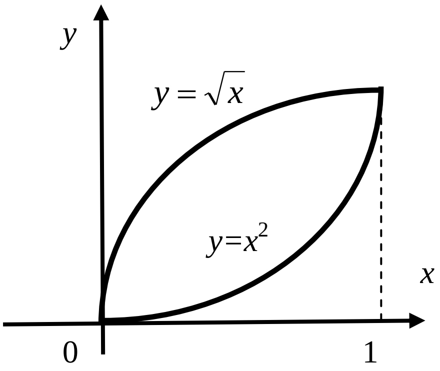
$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_A}^{x_B} \left(P(x,y(x)) + Q(x,y(x))y'(x)\right)dx\,.$$

2). Если кривая AB задана параметрически уравнениями x=$x(t)$, y=$y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, где функции x=$x(t)$, y=$y(t)$ непрерывно дифференцируемы на интервале (α, β), то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx = \int\limits_{t_A}^{t_B} P(x(t),y(t))x'(t)dt\,,\quad \int\limits_{AB} Q(x,y)dy = \int\limits_{t_A}^{t_B} Q(x(t),y(t))\,y'(t)dt\,,$$

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_A}^{t_B} \left(P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)\right)dt\,.$$

Пример. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L x^2ydx + x^3dy$, L – контур, ограниченный параболами $y^2 = x$; $x^2 = y$. Направление обхода контура положительное.



Решение. Представим замкнутый контур L как сумму двух дуг $L_1 = x^2$ и $L_2 = \sqrt{x}$. Тогда

$$\oint\limits_L x^2ydx + x^3dy = \int\limits_{L_1} x^2ydx + x^3dy + \int\limits_{L_2} x^2ydx + x^3dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 \cdot x^2 + x^3 \cdot \left(x^2\right)' \right) dx + \int\limits_1^0 \left(x^2\sqrt{x} + x^3 \cdot \left(\sqrt{x}\right)' \right) dx =$$

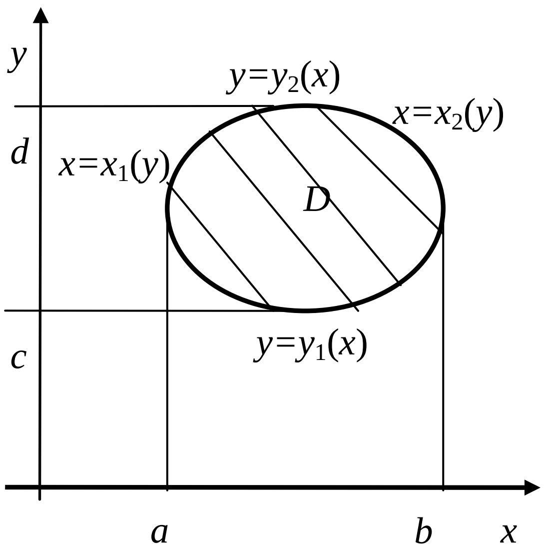
$$= \int\limits_0^1 \left(x^4 + x^3 \cdot 2x\right) dx + \int\limits_1^0 \left(x^2\sqrt{x} + x^3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 3x^4dx + \int\limits_1^0 \left(x^{2,5} + \frac{1}{2}x^{2,5} \right) dx = 3\int\limits_0^1 x^4dx + \frac{3}{2}\int\limits_1^0 x^{2,5}dx = 3 \cdot \frac{x^5}{5}\Bigg|_0^1 + \frac{3}{2} \cdot \frac{2x^{3,5}}{7}\Bigg|_1^0 = \frac{3}{5} - \frac{3}{7} = \frac{6}{35}.$$

2.4. Формула Грина-Остроградского. (Остроградский Михаил Васильевич (1861-1862) – русский математик, академик Петербургской Академии наук, Джордж Грин (1793 – 1841) – английский математик).

Формула Грина-Остроградского устанавливает связь между криволинейным интегралом и двойным интегралом, т.е. дает выражение интеграла по замкнутому контуру через двойной интеграл по области, ограниченной этим контуром.

Будем считать, что рассматриваемая область **односвязная**, т.е. в ней нет исключенных участков.



Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в замкнутой односвязной области D, ограниченной контуром L (причем область D является правильной и в направлении оси Ox и в направлении оси Oy). Тогда имеет место формула

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,.$$

Эта формула называется **формулой Грина-Остроградского**.

Иногда эту формулу называют формулой Грина, однако, Дж. Грин предложил в 1828 году только частный случай формулы.

Пример. Решим пример, рассмотренный выше, воспользовавшись формулой Грина-Остроградского.

$$\oint\limits_L x^2 ydx + x^3 dy = \iint\limits_D \left(\left(x^3\right)'_x - \left(x^2 y\right)'_y \right) dxdy = \iint\limits_D \left(3x^2 - x^2\right) dydx = \iint\limits_D 2x^2 dydx =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} 2x^2 dy = \int\limits_0^1 2x^2 y \Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^1 2(x^{\frac{5}{2}} - x^4)dx = 2\left(\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^5}{5} \right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5} \right) = \frac{6}{35}.$$

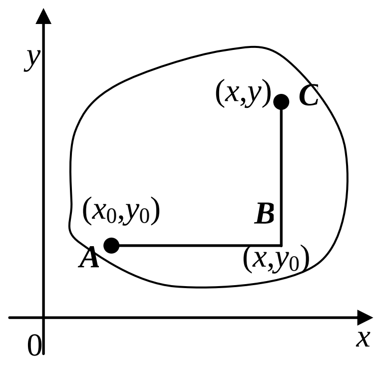
2.5. Условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования. Говорят, что криволинейный интеграл не зависит от формы пути интегрирования, если он вдоль всех путей, соединяющих начальную и конечную точку, имеет одну и ту же величину.

Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области *D*, и контур *L* целиком лежит в этой области. Для того чтобы криволинейный интеграл

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

не зависел от формы пути интегрирования, необходимо и достаточно, чтобы в области *D* выполнялось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}\,. \qquad (1)$$



Если криволинейный интеграл не зависит от формы пути интегрирования, то, как правило, проще всего за путь интегрирования взять ломаную, звенья которой параллельны осям координат. Тогда

$$\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy +$$

$$+\int_{BC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy .$$

Так как на отрезке AB $y = y_0$, то $dy = 0$, и

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx .$$

Аналогично на отрезке BC $x = const$, тогда $dx = 0$, и

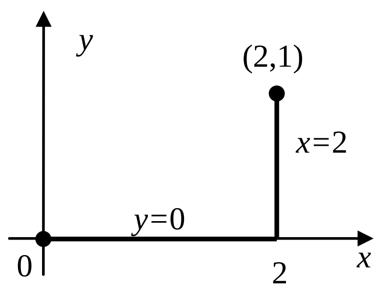
$$\int_{BC} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy .$$

Таким образом,

$$\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy.$$

Отметим, что при выполнении условия (1) интеграл по любому замкнутому контуру, лежащему в области D, равен нулю.

Пример. Вычислить $\int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} x^2y^3dx + x^3y^2dy$.



Решение. Проверим, выполняется ли условие независимости криволинейного интеграла от формы пути интегрирования. Имеем $P(x,y) = x^2y^3$, $Q(x,y) = x^3y^2$, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 3x^2y^2$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2y^2$. То есть частные производные непрерывны и равны на всей плоскости. Поэтому, взяв за путь интегрирования ломаную, изображенную на рисунке, получим:

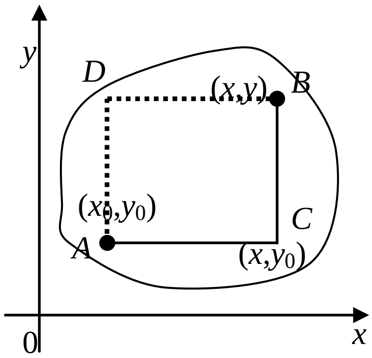
$$\int_{(0,0)}^{(2,1)} x^2y^3dx + x^3y^2dy = \int_0^2 x^2 \cdot 0dx + \int_0^1 8y^2dy = = 8 \cdot \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^1 = \frac{8}{3}.$$

2.6. Нахождение функции по ее полному дифференциалу. Пусть функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными в односвязной области D и в области D выполняется равенство

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Тогда выражение $P(x,y)dx+Q(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $u(x,y)$, которую можно найти через криволинейный интеграл II рода:

$$u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}P(x,y)dx+Q(x,y)dy+C$$



или, интегрируя по ломаной *ACB*, получим формулу:

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x,y)dy+C,$$

а по ломаной *ADC*:

$$u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x}P(x,y)dx+\int\limits_{y_0}^{y}Q(x_0,y)dy+C.$$

2.7. Некоторые приложения криволинейных интегралов по координатам.

1. ***Работа силы***. Работа по перемещению материальной точки вдоль кривой *BC* под действием силы $\vec{F}(x,y)=\{P(x,y);Q(x,y)\}$ вычисляется по формуле:

$$A=\int\limits_{BC}P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

(*физический* смысл криволинейного интеграла по координатам).

2. ***Вычисление площади плоской фигуры.*** Пусть D – некоторая область с границей L. Известно, что $S_D=\iint\limits_D dxdy.$ Положим в формуле Грина-Остроградского $P(x,y)=0; Q(x,y)=x$. Тогда $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=1$ и

$$S_D=\oint\limits_L xdy.$$

Положив $P(x,y)=-y$, $Q(x,y)=0$, аналогично получим

$$S_D = -\oint_L ydx .$$

Если же возьмем $P(x,y) = -\frac{y}{2}, Q(x,y) = \frac{x}{2}$, то

$$S_D = \frac{1}{2}\oint_L xdy - ydx .$$

Таким образом, имеются три формулы для вычисления площади плоской фигуры через интеграл по ее границе.

Замечание. Аналогично определяется и вычисляется криволинейный интеграл по координатам от функции трех переменных по пространственной кривой. В частности, если пространственная кривая AB задана уравнениями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ ($\alpha \le t \le \beta$), где функции $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$ непрерывно дифференцируемы на интервале (α, β), то

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} \left(P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)\right)dt .$$

Теоретические вопросы по теме криволинейные интегралы.

1. Понятие криволинейного интеграла по длине дуги. Его геометрический и физический смысл.

2. Вычисление криволинейного интеграла по длине дуги.

3. Отличие в свойствах криволинейного интеграла по длине дуги от определенного интеграла.

4. Понятие криволинейного интеграла по координатам. Его физический смысл.

5. Вычисление криволинейного интеграла по координатам.

6. Связь между двойным интегралом по области и криволинейным интегралом по границе этой области.

7. Условие независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.

Теоретические задания.

1. Написать и проверить формулу Грина для интеграла $\oint\limits_L \left(\frac{dx}{y} - \frac{dy}{x} \right)$, где L – контур треугольника с вершинами в точках (1; 1), (2; 1), (2; 2).

2. Доказать, что величина интеграла $\int\limits_L (2xy - y)dx + x^2 dy$, где L – замкнутый контур, равна площади области, ограниченной этим контуром.

3. С помощью формулы Грина вычислить разность между интегралами $I_1 = \int\limits_{AmB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$ и $I_2 = \int\limits_{AnB} (x+y)^2 dx - (x-y)^2 dy$, где AmB – отрезок прямой, соединяющей точки A(0; 0) и B(1; 1), а AnB – дуга параболы $y = x^2$.

Упражнения.

1. Вычислить данные криволинейные интегралы по длине дуги:

а) $\int\limits_L \frac{1}{x-y} dl$, где L –отрезок прямой $y = \frac{1}{2}x - 2$, заключенный между точками A(0; -2) и B(4; 0);

б) $\oint\limits_L xydl$, где L – контур прямоугольника с вершинами в точках A(0; 0), B(4; 0), C(4; 2) и D(0; 2);

в) $\int\limits_L ydl$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$ от точки (0; 0) до точки (1; $\sqrt{2}$);

г) $\int\limits_L \sqrt{2y}dl$, где L – первая арка циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$;

д) $\int\limits_L \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}\right)dl$, где L – дуга астроиды $x = \cos^3 t,\ y = \sin^3 t$ от точки (1; 0) до (0; 1);

е) $\int\limits_L x\sqrt{x^2 - y^2}dl$, где L –линия, заданная уравнением $\left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)$ $(x \geq 0)$ (половина лемнискаты);

ж) $\int\limits_L \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}dl$, где L – дуга кардиоиды $\rho = 2(1+\cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$;

з) $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl$, где L – окружность $x^2+y^2=4x$.

2. Вычислить данные криволинейные интегралы по координатам:

а) $\int\limits_L xdy$, где L –отрезок прямой $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, заключенный между точками (a; 0) и (0;b);

б) $\int\limits_L (x^2-y^2)dx$, где L – дуга параболы $y=x^2$ от точки (0; 0) до точки (2;4);

в) $\int\limits_L (x^2+y^2)dy$, где L – контур прямоугольника, образованного прямыми $x=1,\ x=3,\ y=1,\ y=5$;

г) $\int\limits_L (x^2+y^2)dx+(x+y^2)dy$, где L – ломаная ABC, A(2; 0), B(5; 0), C(5; 3);

д) $\int\limits_L (xy-x)dx+\frac{x^2}{y}dy$, где L – дуга параболы $y=2\sqrt{x}$ от точки (0; 0) до точки (1;2);

е) $\int\limits_L \frac{dy}{x}-\frac{dx}{y}$, где L – дуга окружности $x=R\cos t,\ y=R\sin t$ в первой четверти, пробегаемая против хода часовой стрелки;

ж) $\int\limits_L (2a-y)dx+xdy$, где L – арка циклоиды $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)\ (0\le t\le 2\pi)$;

з) $\int\limits_L \frac{xy(ydx-xdy)}{x^2+y^2}$, где L – правый лепесток лемнискаты $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$.

3. Вычислить криволинейный интеграл, предварительно убедившись, что он не зависит от формы пути интегрирования:

а) $\int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} 2xydx + x^2dy$; *б*) $\int\limits_{(0,1)}^{(1,2)} \frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy$;

в) $\int\limits_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{ydx - xdy}{x^2}$; *г*) $\int\limits_{(-2,-1)}^{(3,0)} \left(x^4 + 4xy^3\right)dx + \left(6x^2y^2 - 5y^4\right)dy$;

д) $\int\limits_{(1,\pi)}^{(2,3\pi)} \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)dx + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)dy$;

е) $\int\limits_{(0,1)}^{(2,0)} \frac{2x\left(1 - e^y\right)}{\left(1 + x^2\right)^2}dx + \frac{e^y}{1 + x^2}dy$.

4. Показать, что выражение $y(1 + \cos xy)dx + x(1 + \cos xy)dy$ является полным дифференциалом функции $u(x, y)$. Найти функцию $u(x, y)$:

а) $\left(3x^2 - 2xy + y^2\right)dx - \left(x^2 - 2xy + 3y^2\right)dy$;

б) $\left(e^{2y} - 5y^3e^x\right)dx + \left(2xe^{2y} - 15y^2e^x\right)dy$;

в) $\left(12x^2y + \frac{1}{y^2}\right)dx + \left(4x^3 - \frac{2x}{y^3}\right)dy$;

г) $\frac{x + 2y}{(x + y)^2}dx + \frac{y}{(x + y)^2}dy$;

д) $\left(2x\cos y - y^2\sin x\right)dx + \left(2y\cos x - x^2\sin y\right)dy$;

е) $\left(24x^2\sin 2y + \frac{4\sqrt{1 + y^2}}{(1 + x)^2}\right)dx + \left(16x^3\cos 2y - \frac{4y}{(1 + x)\sqrt{1 + y^2}} - y\right)dy$;

ж) $\left(\cos 4x - \frac{1}{x^2y}\right)dx - \frac{1}{xy^2}dy$;

з) $\left(2xe^{x^2 - y^2} - \sin x\right)dx + \left(\sin y - 2ye^{x^2 - y^2}\right)dy$.

5. Вычислить заданные криволинейные интегралы с помощью формулы Грина-Остроградского. Результат проверить непосредственным вычислением криволинейных интегралов:

а) $\int\limits_L (x+y)^2 dx - \left(x^2+y^2\right)dy$, где L – контур треугольника с вершинами в точках $A(1;\,1)$, $B(3;\,2)$, $C(2;\,5)$;

б) $\int\limits_L e^x(1-\cos y)dx - (y-\sin y)dy$, где L – контур, ограничивающий область $0 \le x \le \pi,\ 0 \le y \le \sin x$;

в) $\int\limits_L \left(1-x^2\right)ydx + x\left(1+y^2\right)dy$, где L – окружность $x^2+y^2=R^2$;

г) $\int\limits_L (xy+x+y)dx + (xy+x-y)dy$, где L – окружность $x^2+y^2=2x$;

д) $\int\limits_L \left(y-x^2\right)dx + \left(x+y^2\right)dy$, где L – граница кругового сектора радиуса R с углом $\varphi\left(0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}\right)$.

6. Вычислить площадь части цилиндрической поверхности:

а) $y^2=2x$ над плоскостью *Оху*, срезанной сверху поверхностью $z=\sqrt{2x-4x^2}$;

б) $x^2+y^2=R^2$ над плоскостью *Оху*, срезанной сверху поверхностью $z=\dfrac{xy}{2R}$;

в) $y^2=\dfrac{4}{9}(x-1)^3$ над плоскостью *Оху*, срезанной сверху поверхностью $z=2-\sqrt{x}$;

г) $y=\dfrac{3}{8}x^2$, ограниченной плоскостями $z=0,\ x=0,\ z=x,\ y=6$;

д) $y=x^2\ (1 \le x \le 2)$ над плоскостью *Оху*, срезанной сверху поверхностью $z=x+y$.

7. Найти массу:

а) дуги параболы $y=\frac{x^2}{2}$, лежащей между точками (1; $\frac{1}{2}$) и (2; 2), если линейная плотность $\rho(x,y)=\frac{y}{x}$;

б) кривой $x=\ln(1+t^2)$, $y=2arctgt$ на участке от $t=0$ до $t=1$, если линейная плотность $\rho(x,y)=\frac{y}{e^x}$;

в) четверти эллипса $x=a\cos t,\ y=b\sin t$, расположенной в первой четверти, если плотность в каждой точке равна ординате этой точки.

8. Вычислить длину заданной дуги:

а) $ay^2=x^3,\ 0\le x\le 5a$;

б) $\rho=a\sin^3\frac{\varphi}{3}$;

в) $x=1-\ln\cos x\ \left(0\le x\le\frac{\pi}{4}\right)$.

9. Вычислить координаты центра тяжести заданных кривых:

а) $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ 0\le t\le\pi$;

б) $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}\ \ (0\le x\le a)$;

в) дуги астроиды $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$, расположенной над осью *Ox*.

10. Вычислить при помощи криволинейного интеграла площади плоских фигур, ограниченных следующими кривыми:

а) эллипсом $x=a\cos t,\ y=b\sin t$;

б) астроидой $x=a\cos^3 t,\ y=b\sin^3 t$;

в) кардиоидой $x=a(2\cos t-\cos 2t),\ y=a(2\sin t-\sin 2t)$.

11. Найти работу.

а) Поле образовано силой $\vec{F}(x,y)=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}$. Определить работу по перемещению массы *m* по ломаной, соединяющей точки *A*(0; 0), *B*(0; *a*), *C*(*a*; *a*).

б) Силовое поле образовано силой $\vec{F}(x,y)$, численно равной расстоянию от точки ее приложения до начала координат и направленной в начало координат. Найти работу поля, затраченную на перемещение материальной точки единичной массы по дуге параболы $y^2=8x$ от точки (2;4) и (4; $4\sqrt{2}$).

в) Силовое поле образовано силой, имеющей постоянную величину *F* и направление положительной полуоси *Ox*. Найти работу поля, затраченную на перемещение материальной точки единичной массы по ходу часовой стрелки вдоль дуги окружности $x^2+y^2=R^2$, лежащей в первой четверти.

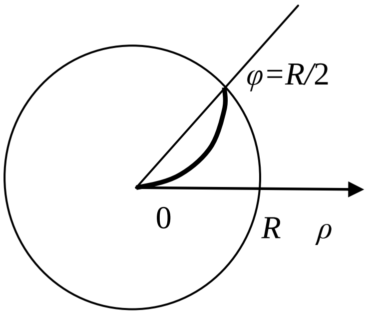
г) В каждой точке плоскости действует сила $\vec{F}$, проекции которой на координатные оси равны $F_x=xy,\ F_y=x+y$. Вычислить работу силы при перемещении материальной точки единичной массы из начала координат в точку (1;1) по прямой $y=x$ и по параболе $y=x^2$.

д) Проекции силы на оси координат задаются формулами $F_x=2xy,\ F_y=x^2$. Показать, что работа силы по перемещению точки зависит только от ее начального и конечного положения и не зависит от формы пути. Вычислить величину работы при перемещении из точки (1;0) в точку (0;3).

Задачи для самостоятельного решения

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_L arctg\dfrac{y}{x}dl$, где *L* – часть спирали Архимеда $\rho=2\varphi$, заключенная внутри круга радиуса *R*=1 с центром в начале координат.

Решение. Окружность и спираль Архимеда пересекаются при $\varphi=\dfrac{1}{2}$ (так



как $R=\rho(\varphi)$, то есть $1=2\varphi$ при $\varphi=\frac{1}{2}$). Следовательно, для части спирали Архимеда $\rho=2\varphi$, заключенной внутри круга радиуса R=1 с центром в начале координат $\varphi\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$. В полярных координатах $x=\rho(\varphi)\cos\varphi,\ y=\rho(\varphi)\sin\varphi$, то есть $x=2\varphi\cos\varphi,\ y=2\varphi\sin\varphi$. Тогда

$$arctg\frac{y}{x}=arctg\frac{2\varphi\sin\varphi}{2\varphi\cos\varphi}=\varphi,$$

$$\sqrt{(r(\varphi))^2+(r'(\varphi))^2}=\sqrt{(2\varphi)^2+\left((2\varphi)'\right)^2}=\sqrt{4\varphi^2+4}=2\sqrt{\varphi^2+1}$$

и $\int\limits_L arctg\frac{y}{x}dl=\int\limits_0^{1/2}2\varphi\sqrt{\varphi^2+1}d\varphi=\int\limits_0^{1/2}2\varphi\sqrt{\varphi^2+1}\frac{d(\varphi^2+1)}{2\varphi}=\int\limits_0^{1/2}\sqrt{\varphi^2+1}d(\varphi^2+1)=$

$$=\left.\frac{(\varphi^2+1)^{3/2}}{3/2}\right|_0^{1/2}=\frac{2}{3}\left(\frac{5\sqrt{5}}{8}-1\right)=\frac{5\sqrt{5}-8}{12}.$$

Задание 1. Вычислить данные криволинейные интегралы I рода.

1. $\oint\limits_L(x^2+y^2)dl$, где L – окружность $x^2+y^2=4$.

2. $\int\limits_L\frac{1}{\sqrt{8-x^2-y^2}}dl$, где L – отрезок прямой от точки (0; 0) до (2; 2).

3. $\int\limits_L\left(4\sqrt[3]{x}-3\sqrt{y}\right)dl$, где L – отрезок прямой от точки (-1; 0) до (0; 1).

4. $\int\limits_L\frac{1}{\sqrt{5}(x-y)}dl$, где L – отрезок прямой от точки (0; 4) до (4; 0).

5. $\int\limits_L ydl$, где L – дуга астроиды $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t$ от точки (1; 0) до (0; 1).

6. $\int\limits_L arctg\frac{y}{x}dl$, где L – дуга кардиоиды $\rho=(1+\cos\varphi),\ 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}$.

7. $\int\limits_L \sqrt{2y}dl$, где L – первая арка циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$.

8. $\int\limits_L \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}dl$, где L – отрезок прямой от точки (0; 0) до (1; 2).

9. $\oint\limits_L xydl$, где L – контур прямоугольника с вершинами в точках (0; 0), (2; 0), (2; 4), (0; 4).

10. $\oint\limits_L (x + y)dl$, где L – контур треугольника с вершинами в точках (1; 0), (0; 1), (0; 0).

11. $\oint\limits_L (x + y)dl$, где L – контур треугольника с вершинами в точках (-1; 0), (0; 1), (0; 0).

12. $\int\limits_L (x + y)dl$, где L – дуга лемнискаты Бернулли $\rho^2 = \cos 2\varphi$, $-\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$.

13. $\oint\limits_L \sqrt{x^2 + y^2}dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 2y$.

14. $\oint\limits_L xydl$, где L – контур прямоугольника с вершинами в точках (0; 0), (5; 0), (5; 3), (0; 3).

15. $\oint\limits_L (x^2 + y^2)dl$, где L – окружность $x^2 + y^2 = 4x$.

16. $\oint\limits_L xydl$, где L – контур квадрата со сторонами $x = \pm 1$, $y = \pm 1$.

17. $\int\limits_L y^2 dl$, где L – первая арка циклоиды $x = (t - \sin t)$, $y = (1 - \cos t)$.

18. $\oint\limits_L xydl$, где L – контур прямоугольника с вершинами в точках (2; 0), (4; 0), (4; 3), (2; 3).

19. $\int\limits_L ydl$, где L – дуга параболы $y^2 = 2x$, отсеченная параболой $y = \frac{x^2}{2}$.

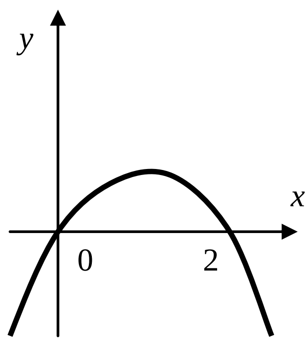
20. $\int\limits_L \frac{1}{x-y}dl$, где L – отрезок прямой от точки (4; 0) до (6; 1).

21. $\oint\limits_L \sqrt{x^2+y^2}dl$, где L – окружность $x^2+y^2=2x$.

22. $\oint\limits_L (x-y)dl$, где L – окружность $x^2+y^2=2x$.

Пример. Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L ydx-(y+x^2)dy$, где L – дуга параболы $y=2x-x^2$, расположенная над осью Ox и пробегаемая по ходу часовой стрелки.

Решение. $\int\limits_L ydx-(y+x^2)dy=\int\limits_0^2\left((2x-x^2)-((2x-x^2)+x^2)(2x-x^2)'\right)dx=$



$$=\int\limits_0^2((2x-x^2)-((2x-x^2)+x^2)(2-2x))dx=$$

$$=\int\limits_0^2((2x-x^2)-2x(2-2x))dx=\int\limits_0^2(2x-x^2-4x+4x^2)dx=$$

$$=\int\limits_0^2(3x^2-2x)dx=(x^3-x^2)\Big|_0^2=8-4=4.$$

Задание 2. Вычислить данные криволинейные интегралы второго рода вдоль заданной линии (для замкнутых кривых направление предполагается положительным).

1. $\int\limits_L (x^2-2xy)dx+(y^2-2xy)dy$, где L – дуга параболы $y=x^2$ от точки (-1; 1) до (1; 1).

2. $\int\limits_L \frac{x^2dy-y^2dx}{\sqrt[3]{x^5}+\sqrt[3]{y^5}}$, где L – дуга астроиды $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t$ от точки (2; 0) до (0; 2).

3. $\int\limits_L (x^2+y^2)dx+2xydy$, где L – дуга кубической параболы $y=x^3$ от точки

(0; 0) до (1; 1).

4. $\oint\limits_L (x+2y)dx+(x+y)dy$, где L – окружность $x=2\cos t,\ y=2\sin t$.

5. $\oint\limits_L \left(x^2y-x\right)dx+\left(y^2x-2y\right)dy$, где L – эллипс $x=3\cos t,\ y=2\sin t$.

6. $\int\limits_L (xy-1)dx+x^2ydy$, где L – дуга эллипса $x=\cos t,\ y=2\sin t$ от точки (1; 0) до точки (0; 2).

7. $\int\limits_L 2xydx-x^2dy$, где L – ломаная OBA, O(0; 0), B(2; 0), A(2; 1).

8. $\int\limits_L \left(x^2-y^2\right)dx+xydy$, где L – отрезок прямой от точки (1; 1) до (3; 4).

9. $\int\limits_L \cos ydx-\sin xdy$, где L – отрезок прямой от точки (2π; -2π) до (-2π; 2π).

10. $\int\limits_L \frac{ydx+xdy}{x^2+y^2}$, где L – отрезок прямой от точки (1; 2) до точки (3; 6).

11. $\int\limits_L xydx+(y-x)dy$, где L – дуга кубической параболы $y=x^3$ от точки (0; 0) до точки (1; 1).

12. $\int\limits_L \left(x^2+y^2\right)dx+\left(x+y^2\right)dy$, где L – ломаная ABC, A(1; 2), B(3; 2), C(3; 5).

13. $\int\limits_L ydx+xdy$, где L – дуга окружности $x=R\cos t,\ y=R\sin t$ от точки (R; 0) до точки (0; R).

14. $\int\limits_L xydx+(y-x)dy$, где L – дуга параболы $y^2=x$ от точки (0; 0) до точки (1; 1).

15. $\int\limits_L (xy-1)dx+x^2ydy$, где L – дуга параболы $y^2=4-4x$ от точки (1; 0) до точки (0; 2).

16. $\int\limits_L (xy-x)dx+\frac{1}{2}x^2dy$, где L – дуга параболы $y^2=4x$ от точки (0; 0) до точки (1; 2).

17. $\int\limits_L (xy-1)dx + x^2 y dy$, где L – отрезок прямой от точки (1; 0) до (0; 2).

18. $\int\limits_L \frac{y}{x} dx + x dy$, где L –дуга линии $y = \ln x$ от точки (1; 0) до (e; 1).

19. $\oint\limits_L y dx - x dy$, где L – эллипс $x = 3\cos t,\ y = 2\sin t$.

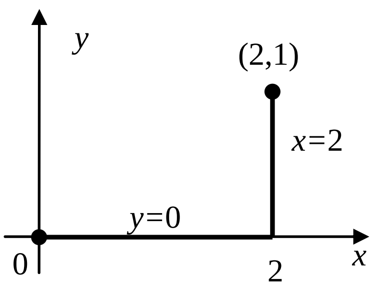
20. $\int\limits_L 2xy dx - x^2 dy$, где L – дуга параболы $y = \frac{x^2}{4}$ от точки (0; 0) до (2; 1).

21. $\int\limits_L \left(x^2 + y^2\right)dx + \left(x^2 - y^2\right)dy$, где L – ломаная $y = |x|$ от точки (-1; 1) до точки (2; 2).

22. $\oint\limits_L x dy - y dx$, где L – контур треугольника с вершинами в точках (-1; 0), (1; 0), (0; 1).

Пример. Вычислить интеграл $\int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} \left(ye^{xy} + y^2\right)dx + \left(xe^{xy} + 2xy\right)dy$, предварительно убедившись, что он не зависит от формы пути интегрирования.

Решение. Проверим, выполняется ли условие независимости криволинейного интеграла от формы пути интегрирования. Имеем



$P(x,y) = ye^{xy} + y^2$, $\qquad Q(x,y) = xe^{xy} + 2xy$,

$\frac{\partial P}{\partial y} = e^{xy} + xye^{xy} + 2y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^{xy} + xye^{xy} + 2y$. То есть частные производные непрерывны и равны на всей плоскости. Поэтому, взяв за путь интегрирования ломаную, изображенную на рисунке, получим:

$$\int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} \left(ye^{xy} + y^2\right)dx + \left(xe^{xy} + 2xy\right)dy = \int\limits_0^2 0dx + \int\limits_0^1 \left(2e^{2y} + 4y\right)dy =$$

$$= \left(e^{2y} + 2y^2\right)\Big|_0^1 = e^2 + 2 - e^0 = e^2 + 1.$$

Задание 3. Вычислить криволинейный интеграл, предварительно убедившись, что он не зависит от формы пути интегрирования.

1. $\int\limits_{(-1,2)}^{(2,3)} ydx + xdy$.

2. $\int\limits_{(0,0)}^{(2,1)} 2xydx + x^2dy$.

3. $\int\limits_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2}$.

4. $\int\limits_{(1,\pi/6)}^{(2,\pi/4)} \cos 2ydx - 2x\sin 2ydy$.

5. $\int\limits_{(1,\pi/6)}^{(2,\pi/4)} tgydx + x\frac{1}{\cos^2 y}dy$.

6. $\int\limits_{(0,1)}^{(1,2)} (2x - 3y^2 + 1)dx + (2 - 6xy)dy$.

7. $\int\limits_{(1,1)}^{(2,3)} (x + 3y)dx + (y + 3x)dy$.

8. $\int\limits_{(1,0)}^{(2,2)} \left(\frac{2xy^2}{1 + x^2y^2} - 3\right)dx + \left(\frac{2x^2y}{1 + x^2y^2} - 5\right)dy$

9. $\int\limits_{(\pi/6,\pi/6)}^{(\pi/2,\pi/4)} \left(-\frac{1}{2}\cos 2y - y\sin 2x\right)dx + \left(x\sin 2y + \cos^2 x\right)dy$.

10. $\int\limits_{(2,0)}^{(2,2)} \left(y^2e^{xy^2} + 3\right)dx + \left(2xye^{xy^2} - 1\right)dy$.

11. $\int\limits_{(1,1)}^{(2,e)} \left(\frac{y}{x} + \ln y + 2x\right)dx + \left(\ln x + \frac{x}{y} + 1\right)dy$.

12. $\int\limits_{(0,0)}^{(\pi,\pi/2)} \left(e^{x+y} - \cos x\right)dx + \left(e^{x+y} + \sin y\right)dy$.

Пример. Показать, что выражение $y(1 + \cos xy)dx + x(1 + \cos xy)dy$ является полным дифференциалом функции $u(x, y)$. Найти функцию $u(x, y)$.

Решение. Проверим, выполняется ли условие полного дифференциала: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Имеем: $P(x, y) = y(1 + \cos xy)$, $Q(x, y) = x(1 + \cos xy)$,

$\frac{\partial P}{\partial y} = (1 + \cos xy) - xy\sin xy$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = (1 + \cos xy) - xy\sin xy$. То есть частные производные непрерывны и равны на всей плоскости. Поэтому, положив в формуле $u(x,y)=\int\limits_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)dy+C \qquad x_0=0,\ y_0=0$, получим:

$$u(x,y)=\int\limits_0^x 0(1+\cos 0)dx+\int\limits_0^y x(1+\cos xy)dy+C=x\int\limits_0^y dy+x\int\limits_0^y \cos xydy+C=$$

$$=xy\Big|_0^y+x\cdot\frac{1}{x}\sin xy\Big|_0^y+C==xy+\sin xy+C\,.$$

Задание 4. Показать, что данное выражение является полным дифференциалом функции $u(x,y)$. Найти функцию $u(x,y)$.

1. $(y\cos xy+4x-5y)dx+(x\cos xy-5x+4y)dy$.
2. $\left(y^2e^{xy}-2\right)dx+e^{xy}(1+xy)dy$.
3. $\dfrac{x+y}{xy}dx+\dfrac{y-x}{y^2}dy$.
4. $\left(\dfrac{y}{\sqrt{1-x^2y^2}}+x^2\right)dx+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2y^2}}-2y\right)dy$.
5. $\left(y\sin(x+y)+xy\cos(x+y)-6x^2\right)dx+\left(x\sin(x+y)+xy\cos(x+y)+4y\right)dy$.
6. $\left(4y+\cos x+6xy^2\right)dx+\left(4x+6x^2y\right)dy$.
7. $(2y-3\sin x)dx+\left(2x-2y\cos y^2\right)dy$
8. $y\left(e^{xy}+1\right)dx+x\left(e^{xy}+1\right)dy$.
9. $\dfrac{x\ln y+y}{x}dx+\dfrac{y\ln x+x}{y}dy$.
10. $\dfrac{1-y}{x^2y}dx+\dfrac{1-2x}{xy^2}dy$.
11. $\left(9x^2-2xy+y\right)dx+\left(x-x^2-6y^2-2y\right)dy$.
12. $\left(6x^2-2xy+y^3\right)dx+\left(3xy^2-x^2-6y^2\right)dy$.

Задание 5. Решить следующие задачи.

1. Вычислить длину дуги цепной линии $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in [0;1]$.

2. Вычислить моменты инерции относительно осей координат отрезка однородной прямой $2x + y = 1$, лежащего между осями.

3. Найти координаты центра масс четверти однородной окружности $x^2 + y^2 = 4$, лежащей в первой четверти.

4. Вычислить координаты центра масс однородной дуги одной арки циклоиды $x = (t - \sin t)$, $y = (1 - \cos t)$.

5. Вычислить координаты центра масс однородной полуокружности $x^2 + y^2 = 4$, симметричной относительно оси *Ox*.

6. Вычислить момент инерции относительно начала координат отрезка прямой, заключенного между точками *A*(2; 0) и *B*(0; 1), если линейная плотность в каждой его точке равна 1.

7. Вычислить массу отрезка прямой $y = 2 - x$, заключенного между координатными осями, если линейная плотность в каждой его точке пропорциональна квадрату абсциссы в этой точке, а в точке (2; 0) равна 4.

8. Вычислить работу силы $\vec{F}(x, y) = x \cdot \vec{i} + (x + y) \cdot \vec{j}$ при перемещении точечной массы *m* по дуге эллипса $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

9. Вычислить массу дуги кривой $\rho = 3\sin\varphi, \varphi \in \left[0; \dfrac{\pi}{4}\right]$, если плотность в каждой ее точке пропорциональна расстоянию до полюса и при $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ равна 3.

10. Вычислить моменты инерции относительно координатных осей дуги четверти окружности $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, лежащей в первой четверти.

11. Вычислить массу дуги четверти эллипса $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, лежащей в первой четверти, если линейная плотность в каждой ее точке равна произведению координат.

12. Вычислить работу силы $\vec{F}(x,y)=xy\cdot\vec{i}+(x+y)\cdot\vec{j}$ при перемещении точечной массы m по прямой $y=x$ от точки (0; 0) до точки (1; 1).

13. Вычислить работу силы $\vec{F}(x,y)=(x-y)\cdot\vec{i}+x\cdot\vec{j}$ при перемещении точечной массы m вдоль контура квадрата, образованного прямыми $y=\pm 1,\ x=\pm 1$.

14. Вычислить длину одной арки циклоиды $x=3(t-\sin t),\ y=3(1-\cos t)$.

15. Вычислить работу силы $\vec{F}(x,y)=(x+y)\cdot\vec{i}-x\cdot\vec{j}$ при перемещении точечной массы m вдоль окружности $x=2\cos t,\ y=2\sin t$ по ходу часовой стрелки.

16. Вычислить работу силы $\vec{F}(x,y)=y\cdot\vec{i}+(x+y)\cdot\vec{j}$ при перемещении точечной массы m из начала координат в точку (1; 1) по параболе $y=x^2$.

17. Вычислить работу силы $\vec{F}(x,y)=(x-y)\cdot\vec{i}+2y\cdot\vec{j}$ при перемещении точечной массы m из начала координат в точку (1; -3) по параболе $y=-3x^2$.

18. Вычислить моменты инерции относительно осей координат однородного отрезка прямой $y=2x$, заключенного между точками (1; 2) и (2; 4).

19. Вычислить моменты инерции относительно осей координат однородного отрезка прямой $2y+4x=3$, лежащего между точками (0; 3/2) и (2; -5/2).

20. Вычислить массу дуги кривой $y=\ln x$, заключенной между точками с абсциссами $x=\sqrt{3}$ и $x=\sqrt{8}$, если плотность дуги в каждой точке равна квадрату абсциссы этой точки.

21. Вычислить массу дуги окружности $x = \cos t,\ y = \sin t$, $0 \le t \le \pi$, если линейная плотность ее в точке (x, y) равна y.

22. Поле образовано силой $\vec{F}(x, y) = y \cdot \vec{i} + a \cdot \vec{j}\ (a = const)$. Определить работу по перемещению массы m по контуру, образованному полуосями координат и первой четвертью эллипса $x = a\cos t,\ y = b\sin t$.

23. Вычислить работу силы $\vec{F}(x, y) = (x + y) \cdot \vec{i} + x \cdot \vec{j}$ при перемещении точечной массы m вдоль окружности $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t$.

Литература

1. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. М.: Наука. 1977.

2. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. М.: Высшая школа. 1980.

3. Задачник по курсу математического анализа. Часть II / под ред. Н.Я.Виленкина. М.: Просвещение. 1971.

4. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике. М.: Высшая школа. 1994.

5. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М.: Наука. 1977.

6. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Часть 3 / под ред. А.П.Рябушко. Минск: Высшая школа. 1991.

7. Шипачев В.С. Высшая математика. М.: Высшая школа. 2002.

Содержание